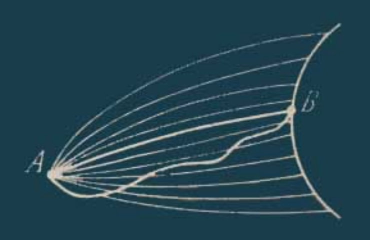
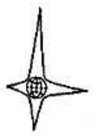
L. ELSGOLTZ

Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional



EDITORIAL MIR · MOSCU



EDITORIAL MIR

Л. ЭЛЬСГОЛЬЦ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Издательство «Наука» МОСКВА

На испанском языке

L. ELSGOLTZ

Ecuaciones Diferenciales
y
cálculo variacional

1969

EDITORIAL MIR

MOSCU

CDU 517.944 + 519.3 (075.8) = 60

Impreso en la URSS

Indice

PARTE I

ECUACIONES DIFERENCIALES

PARTE II

CALCULO VARIACIONAL

Parte I

Ecuaciones diferenciales

Introducción

Al estudiar un fenómeno físico, con frecuencia no es posible hallar de inmediato las leyes físicas que enlazan las magnitudes que caracterizan dicho fenómeno. Pero, al mismo tiempo, es fácil establecer la dependencia entre esas magnitudes y sus derivadas o sus diferenciales. Así obtenemos ecuaciones que contienen las funciones desconocidas, escalares o vectoriales, bajo el signo de derivada o de diferencial.

Las ecuaciones en las cuales la función desconocida, escalar o vectorial, se encuentra bajo el signo de derivada o de diferencial, se llaman *ecuaciones diferenciales*. Veamos algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales.

1) $\frac{dx}{dt} = -kx$ es la ecuación de la desintegración radioactiva. (k es la constante de desintegración; x es la cantidad de sustancia no desintegrada en el momento de tiempo t; la velocidad de desintegración $\frac{dx}{dt}$ es proporcional a la cantidad de sustancia que se desintegra).

2) $m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}\left(t, \mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)$ es la ecuación del movimiento de un punto de masa m, bajo la influencia de una fuerza $\mathbf{F}$ dependiente del tiempo, de la posición del punto—determinada por el radio-vector $\mathbf{r}$—, y de su velocidad $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$. La fuerza es igual al producto de la masa por la aceleración.

3) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 4\pi\rho(x, y, z)$ es la ecuación de Poisson, a la cual satisface, por ejemplo, el potencial $u(x, y, z)$ del campo electrostático; $\rho(x, y, z)$ es la densidad de las cargas.

Si se indican los métodos para hallar las funciones incógnitas, determinadas por las ecuaciones diferenciales, se habrá hallado así la dependencia entre las magnitudes indicadas. La búsqueda de las funciones desconocidas, determinadas por las ecuaciones diferenciales,

es precisamente el problema fundamental de la teoría de las ecuaciones diferenciales.

Si en una ecuación diferencial las funciones desconocidas, escalares o vectoriales, son funciones de una sola variable, la ecuación diferencial es llamada *ordinaria* (por ejemplo, las ecuaciones 1) y 2)). Si, en cambio, la función desconocida es función de dos o más variables independientes, la ecuación diferencial se llama *ecuación en derivadas parciales* (por ejemplo, la ecuación 3)).

Se denomina *orden* de la ecuación diferencial al grado de la derivada (o diferencial) máxima de la función desconocida, que figura en la ecuación.

Se llama *solución* de la ecuación diferencial a una función que, al ser sustituida en la ecuación diferencial, la convierte en una identidad.

Por ejemplo, la ecuación de la desintegración radioactiva

$$\frac{dx}{dt} = -kx \tag{1.1}$$

tiene la solución

$$x = ce^{-kt}, \tag{I.1$_1$}$$

donde c es una constante arbitraria.

Es evidente que la ecuación diferencial (I.1) aún no determina por completo la ley de desintegración $x = x(t)$. Para su completa determinación hay que conocer la cantidad de sustancia que se desintegra x_0 en un momento inicial t_0. Si x_0 es conocida, entonces, tomando en cuenta la condición $x(t_0) = x_0$, de (I.1$_1$) hallamos la ley de la desintegración radioactiva:

$$x = x_0 e^{-k(t-t_0)}.$$

El proceso de determinación de las soluciones de una ecuación diferencial se llama *integración* de la misma. En el ejemplo anterior hallamos fácilmente la solución exacta, pero, en casos más complejos, con frecuencia es necesario utilizar métodos aproximados de integración de dichas ecuaciones. Estos métodos de aproximación hasta hace poco conducían a cálculos engorrosos, pero ahora las rápidas calculadoras electrónicas son capaces de hacer ese trabajo con una velocidad de varias decenas o aún centenas de miles de operaciones por segundo.

Veamos más detalladamente el problema más complejo, mencionado antes, de la determinación de la ley del movimiento $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ de un punto material de masa m, bajo la acción de una fuerza dada $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$. Según la ley de Newton,

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}). \tag{1.2}$$

Por lo tanto, el problema se reduce a la integración de esta ecuación diferencial. Es evidente que la ley del movimiento aún no queda determinada por completo si se dan la masa m y la fuerza $\mathbf{F}$; hay que conocer también la posición inicial del punto

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0 \qquad (I.2_1)$$

y su velocidad inicial

$$\dot{\mathbf{r}}(t_0) = \dot{\mathbf{r}}_0. \qquad (I.2_2)$$

Indiquemos un método muy natural para la resolución aproximada de la ecuación (I.2), con las condiciones iniciales (I.2_1) y (I.2_2). La idea de este método puede servir para la demostración de la existencia de la solución del problema considerado.

Dividamos el segmento de tiempo $t_0 \leqslant t \leqslant T$, en el cual se exige determinar la solución de la ecuación (I.2) que satisface a las condiciones iniciales (I.2_1) y (I.2_2), en n partes iguales de longitud $h = \frac{T - t_0}{n}$:

$$[t_0, t_1], [t_1, t_2], \ldots, [t_{n-1}, T],$$

donde

$$t_k = t_0 + kh \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

En los límites de cada uno de estos pequeños (para grandes valores de n) segmentos de tiempo, la fuerza $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ varía poco (suponemos que la función vectorial $\mathbf{F}$ es continua); por eso, aproximadamente puede ser considerada constante en cada segmento de tiempo $[t_{k-1}, t_k]$ e igual, por ejemplo, a su valor en el punto frontera izquierdo de cada segmento. Más exactamente, en el segmento $[t_0, t_1]$ la fuerza $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ se considera constante e igual a $\mathbf{F}(t_0, \mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0)$. Admitiendo esto, de la ecuación (I.2) y de las condiciones iniciales (I.2_1) y (I.2_2), es fácil determinar la ley del movimiento $\mathbf{r}_n(t)$ en el segmento $[t_0, t_1]$ (el movimiento será uniformemente variado) y, por lo tanto, en particular son conocidos los valores $\mathbf{r}_n(t_1)$ y $\dot{\mathbf{r}}_n(t_1)$. Por este mismo método se determina aproximadamente la ley del movimiento $\mathbf{r}_n(t)$ en el segmento $[t_1, t_2]$, considerando en él a la fuerza $\mathbf{F}$ constante e igual a $\mathbf{F}(t_1, \mathbf{r}_n(t_1), \dot{\mathbf{r}}_n(t_1))$. Continuado este proceso, determinamos la solución aproximada $\mathbf{r}_n(t)$ del problema con condiciones iniciales planteado, para la ecuación (I.2) en todo el segmento $[t_0, T]$.

Está claro intuitivamente que cuando $n \to \infty$, la solución aproximada $\mathbf{r}_n(t)$ debe tender a la solución exacta.

Obsérvese que la ecuación vectorial (I.2) de segundo orden puede sustituirse por un sistema equivalente de dos ecuaciones vectoriales de primer orden, si consideramos la velocidad $\mathbf{v}$ como una segunda

función vectorial desconocida:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt}=\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}). \qquad (I.3)$$

Cada ecuación vectorial en el espacio tridimensional puede ser sustituida, proyectando sobre los ejes de coordenadas, por tres ecuaciones escalares. Por lo tanto, la ecuación (I.2) es equivalente a un sistema de tres ecuaciones escalares de segundo orden, y el sistema (I.3), a un sistema de seis ecuaciones escalares de primer orden.

Finalmente, podemos sustituir una ecuación vectorial (I.2) de segundo orden en el espacio tridimensional por una ecuación vectorial de primer orden en el espacio de seis dimensiones, cuyas coordenadas son las coordenadas r_x, r_y y r_z del radiovector $\mathbf{r}(t)$ y las v_x, v_y y v_z del vector velocidad $\mathbf{v}$. Los físicos llaman a este espacio, *espacio de fases*. El radiovector $\mathbf{R}(t)$ en dicho espacio tiene coordenadas $(r_x, r_y, r_z, v_x, v_y, v_z)$. En esta notación, el sistema (I.3) toma la forma:

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt}=\mathbf{\Phi}(t, \mathbf{R}(t)) \qquad (I.4)$$

(las proyecciones del vector $\mathbf{\Phi}$ en el espacio de seis dimensiones son las correspondientes proyecciones de los segundos miembros del sistema (I.3) en el espacio tridimensional).

Bajo esta interpretación, las condiciones iniciales $(I.2_1)$ y $(I.2_2)$ se sustituyen por la condición

$$\mathbf{R}(t_0)=\mathbf{R}_0. \qquad (I.4_1)$$

La solución de la ecuación (I.4) $\mathbf{R}=\mathbf{R}(t)$ será una trayectoria en el espacio de fases, en la que cada uno de sus puntos corresponde a cierto estado momentáneo del punto en movimiento: a su posición $\mathbf{r}(t)$ y a su velocidad $\mathbf{v}(t)$.

Si aplicamos el método aproximado arriba expuesto a la ecuación (I.4) con condición inicial $(I.4_1)$, entonces en el primer segmento $[t_0, t_1]$ la función vectorial $\mathbf{\Phi}(t, \mathbf{R}(t))$ debe considerarse constante e igual a $\mathbf{\Phi}(t_0, \mathbf{R}(t_0))$. De este modo, para $t_0 \leqslant t \leqslant t_0+h$,

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt}=\mathbf{\Phi}(t_0, \mathbf{R}(t_0)),$$

de donde, multiplicando por dt e integrando entre los límites t_0 y t, obtenemos una función vectorial lineal $\mathbf{R}(t)$:

$$\mathbf{R}(t)=\mathbf{R}(t_0)+\mathbf{\Phi}(t_0, \mathbf{R}(t_0))(t-t_0).$$

En particular, para $t=t_1$ tendremos:

$$\mathbf{R}(t_1)=\mathbf{R}(t_0)+h\mathbf{\Phi}(t_0, \mathbf{R}(t_0)).$$

Repitiendo el mismo razonamiento en los segmentos siguientes, obtenemos

$$\mathbf{R}(t_2)=\mathbf{R}(t_1)+h\Phi(t_1,\ \mathbf{R}(t_1)),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathbf{R}(t_k)=\mathbf{R}(t_{k-1})+h\Phi(t_{k-1},\ \mathbf{R}(t_{k-1})),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Aplicando estas fórmulas n veces, llegamos al valor $\mathbf{R}(T)$.

En este método, la solución buscada $\mathbf{R}(t)$ se sustituye aproximadamente por una función vectorial lineal a trozos, cuyo gráfico es una línea quebrada, llamada *quebrada de Euler*.

Con frecuencia en las aplicaciones prácticas se encuentra un planteo diferente del problema para la ecuación (I.2): las condiciones complementarias se dan no en uno, sino en dos puntos. Este problema se denomina problema *de contorno* o *de frontera*, a diferencia del problema con las condiciones ($\mathrm{I.2}_1$) y ($\mathrm{I.2}_2$), llamado problema con condiciones iniciales, o problema de Cauchy.

Supongamos, por ejemplo, que se pide que el punto material de masa m, el cual se mueve bajo la acción de la fuerza $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t))$, que se hallaba en el momento inicial $t=t_0$ en la posición $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0$, quede en el momento $t=t_1$ en la posición $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1$; es decir, que hay que resolver la ecuación (I.2) con las condiciones de frontera $\mathbf{r}(t_0)=\mathbf{r}_0$, $\mathbf{r}(t_1)=\mathbf{r}_1$. Muchos problemas balísticos se reducen a este problema de frontera. Es evidente que aquí la solución con frecuencia puede no ser única, ya que del punto $\mathbf{r}(t_0)=\mathbf{r}_0$ se puede llegar al punto $\mathbf{r}(t_1)=\mathbf{r}_1$ por la trayectoria rasa y por la pendiente.

La finalidad fundamental de la teoría de las ecuaciones diferenciales es la resolución exacta o aproximada de los problemas con condiciones iniciales y de los problemas de contorno; no obstante, a veces se exige aclarar, o no hay más remedio que limitarse a aclarar sólo ciertas propiedades de las soluciones. Por ejemplo, con frecuencia se exige establecer si existen o no soluciones periódicas u oscilantes, valorar la velocidad de crecimiento o decrecimiento de las soluciones, aclarar si cambia mucho o no la solución para pequeñas variaciones de las condiciones iniciales.

Detengámosnos más detalladamente en el último problema, aplicado a la ecuación de movimiento (I.2). En las aplicaciones prácticas, los valores iniciales $\mathbf{r}_0$ y $\dot{\mathbf{r}}_0$ casi siempre son el resultado de ciertas mediciones y, por consiguiente, inevitablemente se determinan con cierto error. Por eso, surge naturalmente el problema acerca de la influencia de una pequeña variación de las condiciones iniciales sobre la solución buscada.

Si una variación arbitrariamente pequeña de las condiciones iniciales puede producir cambios significativos de la solución, entonces

la solución determinada por los valores iniciales inexactos $\mathbf{r}_0$ y $\dot{\mathbf{r}}_0$ no tiene generalmente ningún valor práctico, ya que ésta no describe ni siquiera aproximadamente el movimiento del cuerpo considerado. Por lo tanto, surge el problema, de gran importancia práctica, de hallar las condiciones bajo las cuales una pequeña variación de los valores iniciales $\mathbf{r}_0$ y $\dot{\mathbf{r}}_0$ ocasiona sólo un pequeño cambio de la solución $\mathbf{r}(t)$ que éstos determinan.

Un problema análogo surge también en los problemas en los que se exige aclarar con qué exactitud hay que dar los valores iniciales $\mathbf{r}_0$ y $\dot{\mathbf{r}}_0$ para que el punto en movimiento se desplace con una exactitud dada por la trayectoria exigida o llegue a una región dada.

También es de gran importancia el problema de la influencia de pequeños sumandos en el miembro derecho de la ecuación (I.2), es decir, de fuerzas pequeñas, pero de acción constante.

En algunos casos estas pequeñas fuerzas, que actúan durante un gran intervalo de tiempo, son capaces de alterar fuertemente la solución, por lo que no se las puede despreciar. En otros casos, la variación de la solución por la acción de estas fuerzas es insignificante, y si ella no sobrepasa la exactitud de cálculo exigida, podemos despreciarlas.

Más adelante se expondrán los métodos de integración de las ecuaciones diferenciales y los procedimientos más simples de análisis de sus soluciones.

CAPITULO 1

Ecuaciones diferenciales de primer orden

§ 1. ECUACIONES DE PRIMER ORDEN RESUELTAS RESPECTO A LA DERIVADA

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden y de primer grado, si se resuelve respecto a la derivada, puede escribirse en la forma

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y).$$

Un ejemplo simple de tal ecuación,

$$\frac{dy}{dx}=f(x),$$

se analiza en el curso de cálculo integral. En este caso simple, la solución

$$y=\int f(x)\,dx+c$$

contiene una constante arbitraria, que puede determinarse si se conoce el valor $y(x_0)=y_0$; entonces

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx.$$

Más adelante será demostrado que, bajo algunas limitaciones establecidas sobre la función $f(x, y)$, la ecuación

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y)$$

tiene también una solución única, que satisface la condición $y(x_0)=y_0$, y su *solución general*, es decir, el conjunto de soluciones que contiene sin excepción a todas las soluciones, depende de una constante arbitraria.

La ecuación diferencial $\frac{dy}{dx}=f(x, y)$ establece una dependencia entre las coordenadas de un punto y el coeficiente angular de la

tangente $\frac{dy}{dx}$ a la gráfica de la solución en ese punto. Conociendo a x y a y, se puede calcular $\frac{dy}{dx}$. Por consiguiente, la ecuación diferencial de la forma considerada determina un campo de direcciones (fig. 1.1), y el problema de la integración de la ecuación diferencial se reduce a hallar las llamadas *curvas integrales*, para las cuales la dirección de las tangentes a éstas coincide en cada punto con la dirección del campo

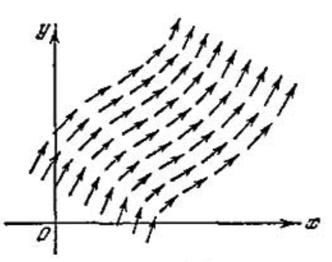


Fig. 1.1

Ejemplo 1.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}.$$

En cada punto, diferente del punto (0, 0), el coeficiente angular de la tangente a la curva integral buscada es igual a la razón $\frac{y}{x}$, o sea, coincide con el coeficiente angular de la recta dirigida desde el origen de coordenadas al mismo punto (x, y). En la fig. 1.2 está representado con flechas el campo de direcciones determinado por la ecuación estudiada. Evidentemente, en este caso las curvas

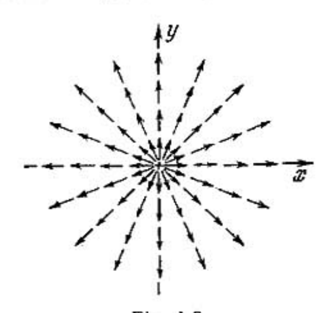


Fig. 1.2

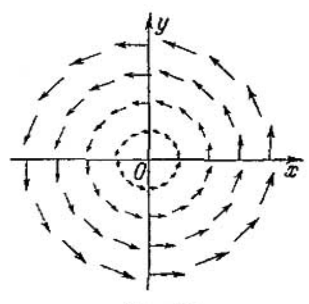


Fig. 1.3

integrales serán las rectas $y=cx$, ya que las direcciones de estas rectas coinciden en todas partes con la dirección del campo.

Ejemplo 2.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}.$$

Obsérvese que el coeficiente angular de la tangente a las curvas integrales buscadas, $-\frac{x}{y}$, y el coeficiente angular $\frac{y}{x}$ de la tangente a las curvas integrales

del ejemplo 1, satisfacen en cada punto la condición de ortogonalidad: $-\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}=-1$. Por lo tanto, el campo de direcciones definido por la ecuación diferencial considerada es ortogonal al campo representado en la fig. 1.2. Es evidente que las curvas integrales de la ecuación $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$ son circunferencias con centro en el origen de coordenadas: $x^2+y^2=c^2$ (fig. 1.3) (más exactamente, semicircunferencias, $y=\sqrt{c^2-x^2}$ e $y=-\sqrt{c^2-x^2}$).

Ejemplo 3.

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Para la construcción del campo direccional, hallemos el lugar geométrico de los puntos en los cuales las tangentes a las curvas integrales buscadas conservan una dirección constante. Tales líneas se llaman *isoclinas*. La ecuación de las isoclinas se obtiene considerando $\frac{dy}{dx}=k$, donde k es una constante: $\sqrt{x^2+y^2}=k$, ó $x^2+y^2=k^2$. Por consiguiente, en este caso las isoclinas son circunferencias con centro en el origen de coordenadas, y el coeficiente angular de la tangente a las

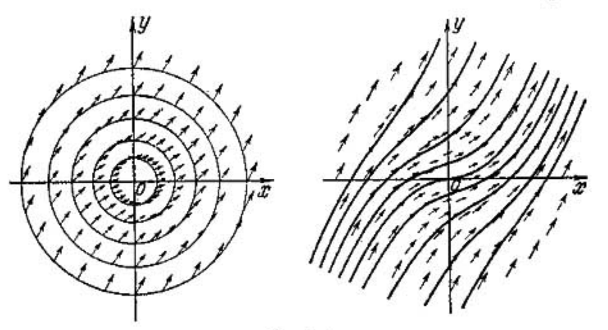


Fig. 1.4

curvas integrales buscadas es igual al radio de dichas circunferencias. Para construir el campo direccional, damos a la constante k ciertos valores determinados (véase la fig. 1.4, parte izquierda). Luego de esto se pueden ya trazar en forma aproximada las curvas integrales buscadas (fig. 1.4, parte derecha).

Ejemplo 4.

$$y'=1+xy.$$

Las isoclinas son las hipérbolas $k=xy+1$, o bien $xy=k-1$; para $k=1$, la hipérbola degenera en el par de rectas $x=0$ e $y=0$ (fig. 1.5). Para $k=0$, obtenemos la isoclina $1+xy=0$. Esta hipérbola divide al plano en partes, en cada una de las cuales y' conserva el signo constante (fig. 1.6). Las curvas integrales $y=y(x)$, al cruzar la hipérbola $1+xy=0$, pasan del campo de crecimiento de la función $y(x)$ al campo de su decrecimiento, o viceversa. Por ello, en las ramas

de esta hipérbola se hallan los puntos de máximo y de mínimo de las curvas integrales.

Determinemos seguidamente el signo de la segunda derivada en las diferentes regiones del plano:

$$y'' = xy' + y, \text{ o bien } y'' = x(1 + xy) + y = x + (x^2 + 1)\,y.$$

La curva $x + (x^2 + 1)\,y = 0$ ó,

$$y = -\frac{x}{1 + x^2} \tag{1.1}$$

(fig. 1.7) divide al plano en dos partes, en una de las cuales $y'' < 0$ y, por consiguiente, las curvas integrales son cóncavas hacia las y negativas, y en la otra

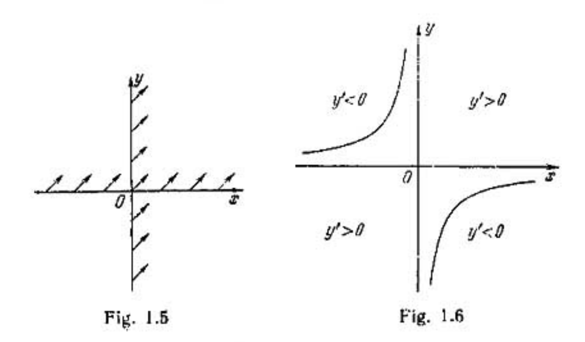


Fig. 1.5 Fig. 1.6

$y'' > 0$, lo que significa que las curvas integrales son cóncavas hacia las y positivas. Al cruzar la curva (1.1), las curvas integrales pasan de la convexidad a la concavidad y, por consiguiente, en esta curva se encuentran los puntos de inflexión de las curvas integrales.

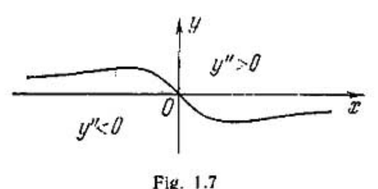


Fig. 1.7

Como resultado del análisis realizado, se conocen el campo de crecimiento y el de decrecimiento de las curvas integrales, la ubicación de los máximos y de los mínimos, la región de convexidad y la de concavidad, así como la disposición de los puntos de inflexión, y la isoclina $k = 1$. Estos datos son suficientes para

hacer un esbozo de la disposición de las curvas integrales (fig. 1.8), pero se hubieran podido trazar algunas isoclinas más, lo que nos permitiría precisar más dicha disposición.

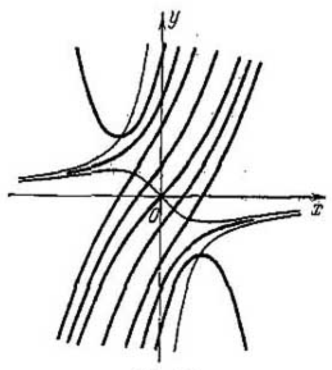


Fig. 1.8

En muchos problemas, en particular en casi todos los problemas de carácter geométrico, las variables x e y son equivalentes. Por ello, en dichos problemas, si éstos se reducen a la resolución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y), \tag{1.2}$$

es natural considerar, conjuntamente con (1.2), también

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(x,\ y)}. \tag{1.3}$$

Si ambas ecuaciones tienen sentido, entonces son equivalentes, ya que si la función $y=y(x)$ es solución de la ecuación (1.2), la función inversa $x=x(y)$ es solución de (1.3) y, por lo tanto, las ecuaciones (1.2) y (1.3) poseen curvas integrales comunes.

Si, en cambio, en algunos puntos una de las ecuaciones (1.2) o (1.3) pierde su sentido, entonces en esos puntos es natural sustituirla por la otra ecuación.

Por ejemplo, la ecuación $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$ carece de sentido para $x=0$. Sustituyéndola por la ecuación $\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}$, cuyo segundo miembro ya no pierde el sentido para $x=0$, hallamos, como complemento a las soluciones encontradas anteriormente $y=cx$ (véase la pág. 18) otra curva integral, $x=0$, de esta ecuación.

§ 2. ECUACIONES CON VARIABLES SEPARABLES

Las ecuaciones diferenciales del tipo

$$f_2(y)\,dy = f_1(x)\,dx \tag{1.4}$$

se llaman *ecuaciones con variables separadas*. Consideremos que las funciones $f_1(x)$ y $f_2(y)$ son continuas.

Supongamos que $y(x)$ es solución de esta ecuación; entonces, al sustituir $y(x)$ en la ecuación (1.4), obtenemos una identidad que, al ser integrada, da

$$\int f_2(y)\,dy = \int f_1(x)\,dx + c, \tag{1.5}$$

donde c es una constante arbitraria.

Hemos obtenido una ecuación finita *) (1.5), satisfecha por todas las soluciones de la ecuación (1.4). Además, cada solución de la ecuación (1.5) es solución de la (1.4), ya que si una función $y(x)$, al ser sustituida en la ecuación (1.5), la transforma en una identidad, entonces derivando dicha identidad obtenemos que $y(x)$ satisface también a (1.4).

La ecuación finita $\Phi(x, y) = 0$, que determina la solución $y(x)$ de la ecuación diferencial como función implícita de x, se llama *integral* de la ecuación diferencial considerada.

Si esta ecuación finita determina sin excepción todas las soluciones de la ecuación diferencial dada, entonces se llama *integral general* de dicha ecuación diferencial. Por consiguiente, la ecuación (1.5) es integral general de la ecuación (1.4). Para que (1.5) determine y como función implícita de x, es suficiente exigir que $f_2(y) \neq 0$.

Es posible que en algunos problemas no sea posible expresar las integrales indefinidas $\int f_1(x)\,dx$ y $\int f_2(y)\,dy$ en funciones elementales; pero, a pesar de esto, consideraremos resuelto también en este caso el problema de la integración de la ecuación diferencial (1.4), en el sentido de que lo hemos reducido a un problema más simple, ya estudiado en el curso de cálculo integral: el problema del cálculo de las integrales indefinidas (de cuadraturas **) .

Si hay que obtener la resolución particular que satisface la condición $y(x_0) = y_0$, ésta evidentemente se determina por la ecuación

$$\int_{y_0}^{y} f_2(y)\,dy = \int_{x_0}^{x} f_1(x)\,dx,$$

---

*) Es decir, una ecuación en la que no figuran ni derivadas ni diferenciales (*N. de la Red.*).

**) Como el término "integral" en la teoría de ecuaciones diferenciales se utiliza frecuentemente en el sentido de integral de la ecuación diferencial, entonces para evitar confusiones, para las integrales de las funciones, $\int f(x)dx$, generalmente se utiliza el término "cuadratura".

la cual se obtiene de

$$\int_{y_0}^{y} f_2(y)\,dy = \int_{x_0}^{x} f_1(x)\,dx + c,$$

utilizando las condiciones iniciales $y(x_0) = y_0$.

Ejemplo 1.

$$x\,dx + y\,dy = 0.$$

Las variables están separadas, ya que el coeficiente de dx es función sólo de x, y el coeficiente de dy, sólo de y. Integrando, obtenemos

$$\int x\,dx + \int y\,dy = c, \text{ o bien } x^2 + y^2 = c_1^2,$$

que es una familia de circunferencias con centro en el origen de coordenadas (compárese con el ejemplo 2, pág. 18).

Ejemplo 2.

$$e^{x^2}\,dx = \frac{dy}{\ln y}.$$

Integrando, obtenemos

$$\int e^{x^2}\,dx = \int \frac{dy}{\ln y} + c.$$

Las integrales $\int e^{x^2}\,dx$ y $\int \frac{dy}{\ln y}$ no se resuelven en funciones elementales; sin embargo, la ecuación original se considera integrada, puesto que el problema fue reducido a cuadraturas.

Las ecuaciones del tipo

$$\varphi_1(x)\,\psi_1(y)\,dx = \varphi_2(x)\,\psi_2(y)\,dy,$$

en las cuales los coeficientes de las diferenciales se descomponen en factores dependientes sólo de x o de y, se llaman *ecuaciones diferenciales con variables separables*, ya que dividiendo entre $\psi_1(y)\,\varphi_2(x)$, éstas se reducen a una ecuación de variables separadas:

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}\,dx = \frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}\,dy.$$

Obsérvese que la división entre $\psi_1(y)\,\varphi_2(x)$ puede conducir a la pérdida de soluciones particulares, que reducen a cero el producto $\psi_1(y)\cdot\varphi_2(x)$; si las funciones $\psi_1(y)$ y $\varphi_2(x)$ pueden ser discontinuas, es posible la aparición de soluciones superfluas, que reducen a cero el factor

$$\frac{1}{\psi_1(y)\,\varphi_2(x)}.$$

Ejemplo 3.

$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$ (compárese con el ejemplo 1, pág. 18). Separamos variables e integramos:

$$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dy}{y}=\int \frac{dx}{x},$$
$$\ln|y|=\ln|x|+\ln c, \quad c>0.$$

Potenciando, obtenemos $|y|=c|x|$. Si se consideran sólo soluciones lisas *), entonces la ecuación $|y|=c|x|$, donde $c>0$, es equivalente a la ecuación $y=\pm cx$, o bien $y=c_1x$, donde c_1 puede tomar valores positivos o negativos, pero $c_1\neq 0$. Si tomamos en cuenta que al dividir entre y se pierde la solución $y=0$, entonces se puede considerar que en la solución $y=c_1x$, la constante c_1 adquiere también el valor $c_1=0$, para el cual obtenemos la solución anteriormente perdida, $y=0$.

Observación. Si en el ejemplo 3 se considera que las variables x e y son equivalentes, entonces la ecuación $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$, que pierde el sentido para $x=0$, debe ser completada con la ecuación $\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}$ (véase la pág. 21), la cual evidentemente posee la solución $x=0$, que no está contenida en la solución $y=c_1x$ hallada anteriormente.

Ejemplo 4.

$$x(1+y^2)\,dx-y(1+x^2)\,dy=0.$$

Separamos variables e integramos:

$$\frac{y\,dy}{1+y^2}=\frac{x\,dx}{1+x^2}; \quad \int \frac{y\,dy}{1+y^2}=\int \frac{x\,dx}{1+x^2}+c;$$
$$\ln(1+y^2)=\ln(1+x^2)+\ln c_1; \quad 1+y^2=c_1(1+x^2).$$

Ejemplo 5.

$$\frac{dx}{dt}=4t\sqrt{x}.$$

Hallar la solución $x(t)$ que satisface la condición $x(1)=1$.

Separamos variables e integramos:

$$\int_1^x \frac{dx}{2\sqrt{x}}=\int_1^t 2t\,dt, \quad \sqrt{x}=t^2, \quad x=t^4.$$

Ejemplo 6. Como ya fué mencionado en la introducción, se ha establecido que la velocidad de desintegración radioactiva es proporcional a la cantidad x de sustancia aún no desintegrada. Hallar la dependencia de x respecto al tiempo t, si en el momento inicial para $t=t_0$, era $x=x_0$.

Supondremos conocido el coeficiente de proporcionalidad k, llamado constante de desintegración. La ecuación diferencial del proceso tendrá la forma

$$\frac{dx}{dt}=-kx \tag{1.6}$$

---

*) Es decir, soluciones que poseen primera derivada continua (*N. de la Red.*).

(el signo — indica que x decrece cuando t aumenta, $k > 0$). Separando variables e integrando, se obtiene

$$\frac{dx}{x} = -k\,dt;\quad \ln|x| - \ln|x_0| = k(t - t_0),$$

de donde

$$x = x_0 e^{-k(t-t_0)}.$$

Determinemos también el período de semidesintegración τ $\left(\text{o sea, el tiempo durante el cual se desintegra } \frac{1}{2}x_0\right)$. Haciendo $t - t_0 = \tau$, obtenemos $\frac{1}{2}x_0 = x_0 e^{-k\tau}$, de donde $\tau = \frac{\ln 2}{k}$.

No solamente la desintegración radioactiva, sino también cualquier otra reacción monomolecular, en base a la ley de acción de las masas, se describe por la ecuación $\frac{dx}{dt} = -kx$, donde x es la cantidad de sustancia que aún no ha reaccionado.

La ecuación

$$\frac{dx}{dt} = kx, \quad k > 0, \tag{1.7}$$

que se diferencia de la (1.6) sólo en el signo del segundo miembro, describe muchos procesos de "reproducción" (o "multiplicación"), por ejemplo, la "reproducción" de la cantidad de neutrones en las reacciones nucleares en cadena, o la reproducción de la cantidad de bacterias, suponiendo que se encuentren en un ambiente óptimo y que, por ello, la velocidad de su crecimiento sea proporcional a la cantidad de bacterias presentes.

La solución de la ecuación (1.7) que satisface la condición $x(t_0) = x_0$ tiene la forma $x = x_0 e^{k(t-t_0)}$ y, a diferencia de las soluciones de (1.6), $x(t)$ no disminuye, sino que crece exponencialmente con el incremento de t.

Ejemplo 7.

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \rho(\rho - 2)(\rho - 4).$$

Trazar las curvas integrales sin integrar la ecuación; ρ y φ son las coordenadas polares.

La ecuación tiene las soluciones evidentes $\rho = 0$, $\rho = 2$ y $\rho = 4$. Para $0 < \rho < 2$, $\frac{d\rho}{d\varphi} > 0$; para $2 < \rho < 4$, $\frac{d\rho}{d\varphi} < 0$ y para $\rho > 4$, $\frac{d\rho}{d\varphi} > 0$.

Por lo tanto, las curvas integrales son las circunferencias $\rho = 2$ y $\rho = 4$, y las espirales que se "envuelven", al aumentar φ, en la circunferencia $\rho = 2$ y se "desenvuelven" de la circunferencia $\rho = 4$. Las curvas integrales cerradas, en entornos suficientemente pequeños de las cuales todas las curvas integrales son espirales, se llaman *ciclos límite*. En el presente ejemplo las circunferencias $\rho = 2$ y $\rho = 4$ son ciclos límite.

Ejemplo 8. Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de parábolas $y = ax^2$.

Se denominan *trayectorias ortogonales* de una familia dada de curvas a las líneas que cortan en ángulo recto las curvas de dicha familia. Los coeficientes angulares y'_1 e y'_2 de las tangentes a las curvas de la familia dada y a las trayectorias ortogonales buscadas, deben satisfacer en cada punto a la condición de

ortogonalidad $y'_2 = -\frac{1}{y'_1}$. Para la familia de parábolas $y' = ax^2$, hallamos $y' = 2ax$, o bien, puesto que $a = \frac{y}{x^2}$, $y' = \frac{2y}{x}$. Por consiguiente la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales buscadas tiene la forma $y' = -\frac{x}{2y}$.

Separando variables, hallamos $2y\,dy + x\,dx = 0$, e integrando, obtenemos la familia de elipses

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = c^2$$

(fig. 1.9).

E j e m p l o 9. Sea $u = xy$ el potencial de las velocidades de una corriente líquida plano-paralela. Hallar la ecuación de las líneas de la corriente.

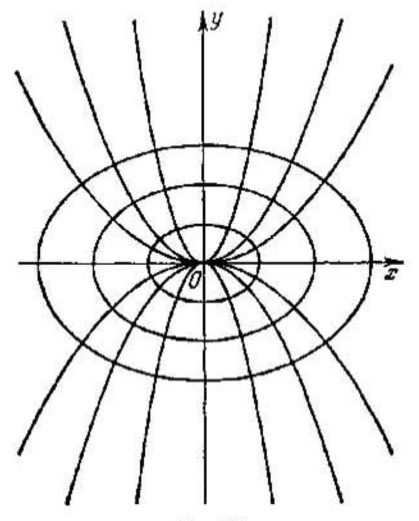


Fig. 1.9

Las líneas de la corriente son las trayectorias ortogonales de la familia de líneas equipotenciales $xy = c$. Hallamos el coeficiente angular de la tangente a las líneas equipotenciales: $xy' + y = 0$, $y' = -\frac{y}{x}$. En consecuencia, la ecuación diferencial de las líneas de la corriente tiene la forma $y' = \frac{x}{y}$, o bien $y\,dy = x\,dx$; integrando, obtenemos $x^2 - y^2 = c$, que es una familia de hipérbolas.

E j e m p l o 10. Una esfera metálica hueca homogénea, de radio interior r_1 y exterior r_2, se encuentra en estado térmico estacionario. Su temperatura en la

superficie interior es igual a T_1, y en la exterior, a T_2. Hallar la temperatura T a la distancia r del centro de la esfera, $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$.

Por simetría se deduce que T es sólo función de r.

Puesto que entre dos esferas concéntricas que tienen por centro común el de la esfera original (sus radios pueden variar desde r_1 hasta r_2) la cantidad de calor permanece constante, entonces a través de cada esfera pasa una misma cantidad de calor Q. Por lo tanto, la ecuación diferencial que describe el proceso considerado tiene la forma

$$-4\pi k r^2 \frac{dT}{dr} = Q,$$

donde k es el coeficiente de conductibilidad térmica.

Separando variables e integrando, obtenemos la dependencia buscada de T respecto a r:

$$4\pi k\, dT = -\frac{Q\, dr}{r^2};$$

$$4\pi k \int_{T_1}^{T} dT = -Q \int_{r_1}^{r} \frac{dr}{r^2},$$

$$4\pi k (T - T_1) = Q\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Para la determinación de Q utilizamos la condición: $T = T_2$ cuando $r = r_2$:

$$Q = \frac{4\pi k (T_2 - T_1)}{\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1}} = \frac{4\pi k (T_2 - T_1)\, r_1 r_2}{r_1 - r_2}.$$

§ 3. ECUACIONES QUE SE REDUCEN A ECUACIONES DE VARIABLES SEPARABLES

Muchas ecuaciones diferenciales pueden ser reducidas a ecuaciones con variables separables mediante una sustitución de variables. A dicho grupo pertenecen, por ejemplo, las ecuaciones de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by),$$

donde a y b son magnitudes constantes, las cuales se transforman en ecuaciones con variables separables por medio de la sustitución $z = ax + by$. Efectivamente, pasando a las nuevas variables x y z, tendremos

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}, \quad \frac{dz}{dx} = a + bf(z),$$

o bien

$$\frac{dz}{a + bf(z)} = dx,$$

con lo que hemos separado las variables. Integrando, obtenemos

$$x=\int \frac{dz}{a+bf(z)}+c.$$

Ejemplo 1.

$$\frac{dy}{dx}=2x+y.$$

Haciendo $z=2x+y$, tendremos

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}-2, \quad \frac{dz}{dx}-2=z.$$

Separando variables e integrando, se obtiene

$$\frac{dz}{z+2}=dx, \quad \ln|z+2|=x+\ln c, \quad z=-2+ce^{x},$$

$$2x+y=-2+ce^{x}, \quad y=ce^{x}-2x-2.$$

Ejemplo 2.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x-y}+1.$$

Haciendo $x-y=z$, obtenemos

$$\frac{dy}{dx}=1-\frac{dz}{dx}, \quad 1-\frac{dz}{dx}=\frac{1}{z}+1;$$

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{z}, \quad z\,dz=-dx, \quad z^2=-2x+c, \quad (x-y)^2=-2x+c.$$

A ecuaciones con varibles separables se reducen también las *ecuaciones diferenciales homogéneas de primer orden*, que tienen la forma

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right).$$

En efecto, después de la sustitución $z=\frac{y}{x}$, o bien $y=xz$, obtenemos

$$\frac{dy}{dx}=x\frac{dz}{dx}+z, \quad x\frac{dz}{dx}+z=f(z), \quad \frac{dz}{f(z)-z}=\frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dz}{f(z)-z}=\ln|x|+\ln c, \quad x=ce^{\int \frac{dz}{f(z)-z}}$$

Obsérvese que el segundo miembro de la ecuación homogénea es una función homogénea de variables x e y de grado nulo de homogeneidad; por eso la ecuación del tipo

$$M(x, y)\,dx+N(x, y)\,dy=0$$

será homogénea si $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son funciones homogéneas de x e y, del mismo grado de homogeneidad, puesto que en este caso

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M(x, y)}{N(x, y)}=f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Ejemplo 3.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\operatorname{tg}\frac{y}{x}.$$

Haciendo $y=xz$, $\frac{dy}{dx}=x\frac{dz}{dx}+z$ y sustituyendo en la ecuación inicial, obtenemos

$$x\frac{dz}{dx}+z=z+\operatorname{tg} z,\quad \frac{\cos z\,dz}{\operatorname{sen} z}=\frac{dx}{x},$$

$$\ln|\operatorname{sen} z|=\ln|x|+\ln c,\ \operatorname{sen} z=cx,\quad \operatorname{sen}\frac{y}{x}=cx.$$

Ejemplo 4.

$$(x+y)\,dx-(y-x)\,dy=0.$$

Haciendo $y=xz$, $dy=x\,dz+z\,dx$, obtenemos

$$(x+xz)\,dx-(xz-x)(x\,dz+z\,dx)=0,$$
$$(1+2z-z^2)\,dx+x(1-z)\,dz=0,$$
$$\frac{(1-z)\,dz}{1+2z-z^2}+\frac{dx}{x}=0,\ \frac{1}{2}\ln|1+2z-z^2|+\ln|x|=$$
$$=\frac{1}{2}\ln c,\ x^2(1+2z-z^2)=c,\ x^2+2xy-y^2=c.$$

Las ecuaciones del tipo

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) \tag{1.8}$$

pueden reducirse a ecuaciones homogéneas, si trasladamos el origen de coordenadas al punto de intersección $(x_1,\ y_1)$ de las rectas

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \quad \text{y} \quad a_2x+b_2y+c_2=0.$$

Efectivamente, el miembro independiente en las ecuaciones de estas rectas en las nuevas coordenadas $X=x-x_1$, $Y=y-y_1$, será igual a cero; los coeficientes de las coordenadas permanecen invariables; $\frac{dy}{dx}=\frac{dY}{dX}$, y la ecuación (1.8) toma la forma

$$\frac{dY}{dX}=f\left(\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}\right),$$

o bien

$$\frac{dY}{dX}=f\left(\frac{a_1+b_1\frac{Y}{X}}{a_2+b_2\frac{Y}{X}}\right)=\varphi\left(\frac{Y}{X}\right),$$

que ya es una ecuación homogénea.

Este método no se puede aplicar sólo en el caso de paralelismo de las rectas $a_1x+b_1y+c_1=0$ y $a_2x+b_2y+c_2=0$. Pero en este caso los coeficientes de las coordenadas son proporcionales:

$\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=k$, y la ecuación (1.8) se puede escribir en la forma

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{k(a_1x+b_1y)+c_2}\right)=F(a_1x+b_1y);$$

por consiguiente, como se demuestra en la pág. 27, el cambio de variables $z=a_1x+b_1y$ transforma la ecuación considerada en una ecuación con variables separables.

Ejemplo 5.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-y+1}{x+y-3}.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones $x-y+1=0$, $x+y-3=0$, obtenemos $x_1=1$, $y_1=2$. Haciendo $x=X+1$, $y=Y+2$, tendremos

$$\frac{dY}{dX}=\frac{X-Y}{X+Y}.$$

El cambio de variables $z=\frac{Y}{X}$, o bien $Y=zX$ conduce a una ecuación de variables separables:

$$z+X\frac{dz}{dX}=\frac{1-z}{1+z},\quad \frac{(1+z)\,dz}{1-2z-z^2}=\frac{dX}{X},$$

$$-\frac{1}{2}\ln|1-2z-z^2|=\ln|X|-\frac{1}{2}\ln c,$$

$$(1-2z-z^2)X^2=c,\quad X^2-2XY-Y^2=c,$$

$$x^2-2xy-y^2+2x+6y=c_1.$$

§ 4. ECUACIONES LINEALES DE PRIMER ORDEN

Se llama *ecuación diferencial lineal de primer orden* a una ecuación lineal con respecto a la función desconocida y a su derivada. La ecuación lineal tiene la forma

$$\frac{dy}{dx}+p(x)\,y=f(x), \tag{1.9}$$

donde $p(x)$ y $f(x)$ se considerarán en lo sucesivo funciones continuas de x en la región en que se exige integrar la ecuación (1.9).

Si $f(x)\equiv 0$, la ecuación (1.9) se llama lineal homogénea. En la ecuación lineal homogénea las variables se separan:

$$\frac{dy}{dx}+p(x)\,y=0,\ \text{de donde}\ \frac{dy}{y}=-p(x)\,dx,$$

e integrando, obtenemos

$$\ln|y|=-\int p(x)\,dx+\ln c_1,\quad c_1>0,$$

$$y=ce^{-\int p(x)\,dx},\quad c\neq 0. \tag{1.10}$$

Al dividir entre y se perdió la solución $y \equiv 0$; sin embargo, ésta puede ser incluida en la familia de soluciones hallada (1.10), si se considera que c puede tomar también el valor 0.

Para integrar la ecuación lineal no homogénea

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = f(x) \tag{1.9}$$

puede ser aplicado el así llamado *método de variación de la constante*. Al aplicar dicho método, primeramente se integra la ecuación homogénea correspondiente (o sea, la que tiene el mismo primer miembro):

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = 0,$$

cuya solución general, como fue indicado anteriormente, tiene la forma

$$y = ce^{-\int p(x)\,dx}.$$

Cuando c es constante, la función $ce^{-\int p(x)\,dx}$ es la solución de la ecuación homogénea. Probemos ahora satisfacer la ecuación no homogénea considerando c como función de x, o sea, realizando en escencia la sustitución de variables

$$y = c(x)\,e^{-\int p(x)\,dx},$$

donde $c(x)$ es una nueva función desconocida de x.

Calculando la derivada

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dc}{dx}e^{-\int p(x)\,dx} - c(x)\,p(x)\,e^{-\int p(x)\,dx}$$

y sustituyéndola en la ecuación no homogénea inicial (1.9), se obtiene

$$\frac{dc}{dx}e^{-\int p(x)\,dx} - c(x)\,p(x)\,e^{-\int p(x)\,dx} + p(x)\,c(x)\,e^{-\int p(x)\,dx} = f(x),$$

o bien

$$\frac{dc}{dx} = f(x)e^{\int p(x)\,dx}.$$

de donde, integrando, se halla

$$c(x) = \int f(x)e^{\int p(x)\,dx}dx + c_1$$

y, por consiguiente,

$$y = c(x)\,e^{-\int p(x)\,dx} = c_1e^{-\int p(x)\,dx} + e^{-\int p(x)\,dx}\int f(x)e^{\int p(x)\,dx}dx. \tag{1.11}$$

De este modo, la solución general de la ecuación lineal no homogénea es igual a la suma de la solución general de la ecuación homogénea correspondiente

$$c_1 e^{-\int p(x)\,dx}$$

y de la solución particular de la ecuación no homogénea

$$e^{-\int p(x)\,dx} \int f(x)\, e^{\int p(x)\,dx}\,dx$$

que se obtiene de (1.11) si $c_1 = 0$.

Obsérvese que en ejemplos concretos no es conveniente utilizar la fórmula (1.11), compleja y difícil de recordar; es más sencillo repetir cada vez todas las operaciones expuestas más arriba.

Ejemplo 1.

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^2.$$

Integramos la ecuación homogénea correspondiente

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0, \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \quad \ln|y| = \ln|x| + \ln c, \quad y = cx.$$

Consideramos c como función de x; entonces $y = c(x)\,x$, $\frac{dy}{dx} = \frac{dc}{dx}x + c(x)$ y, sustituyendo en la ecuación inicial obtenemos, luego de simplificar,

$$\frac{dc}{dx}x = x^2, \text{ o bien } dc = x\,dx, \; c(x) = \frac{x^2}{2} + c_1.$$

Por lo tanto, la solución general es:

$$y = c_1 x + \frac{x^3}{2}.$$

Ejemplo 2.

$$\frac{dy}{dx} - y \operatorname{ctg} x = 2x \operatorname{sen} x.$$

Integramos la ecuación homogénea correspondiente

$$\frac{dy}{dx} - y \operatorname{ctg} x = 0, \quad \frac{dy}{y} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx,$$
$$\ln|y| = \ln|\operatorname{sen} x| + \ln c, \quad y = c \operatorname{sen} x.$$

Variamos la constante

$$y = c(x) \operatorname{sen} x, \quad y' = c'(x) \operatorname{sen} x + c(x) \cos x.$$

Sustituyendo en la ecuación inicial, obtenemos

$$c'(x) \operatorname{sen} x + c(x) \cos(x) - c(x) \cos x = 2x \operatorname{sen} x,$$
$$c'(x) = 2x, \quad c(x) = x^2 + c_1,$$
$$y = x^2 \operatorname{sen} x + c_1 \operatorname{sen} x.$$

Ejemplo 3. En un circuito eléctrico con autoinducción tiene lugar el paso de corriente alterna. La tensión U es una función dada del tiempo, $U=U(t)$, la resistencia R y la autoinducción L son constantes; la intensidad inicial de la corriente $I(0)=I_0$ es dada. Hallar la dependencia de la intensidad de la corriente $I=I(t)$ respecto al tiempo.

Aplicando la ley de Ohm para un circuito eléctrico con autoinducción, obtenemos

$$U-L\frac{dI}{dt}=RI.$$

La solución de esta ecuación lineal que satisface la condición inicial $I(0)=I_0$, de acuerdo con (1.11), tiene la forma

$$I=e^{-\frac{R}{L}t}\left[I_0+\frac{1}{L}\int_0^t U(t)\,e^{\frac{R}{L}t}\,dt\right]. \tag{1.12}$$

Para una tensión constante $U=U_0$, obtenemos

$$I=\frac{U_0}{R}+\left(I_0-\frac{U_0}{R}\right)e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Es interesante el caso de tensión alterna sinusoidal: $U=A\operatorname{sen}\omega t$. En este caso, según (1.12), obtenemos

$$I=e^{-\frac{R}{L}t}\left(I_0+\frac{A}{L}\int_0^t e^{\frac{R}{L}t}\operatorname{sen}\omega t\,dt\right)$$

La integral del segundo miembro se toma fácilmente.

Muchas ecuaciones diferenciales pueden ser reducidas a ecuaciones lineales mediante un cambio de variables. Por ejemplo, la *ecuación de Bernoulli*, que tiene la forma

$$\frac{dy}{dx}+p(x)\,y=f(x)\,y^n,\ \ n\neq 1,$$

o bien

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+p(x)\,y^{1-n}=f(x), \tag{1.13}$$

con el cambio de variables $y^{1-n}=z$, se reduce a una ecuación lineal. Efectivamente, derivando $y^{1-n}=z$, hallamos $(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}$, y sustituyendo en (1.13), obtenemos la ecuación lineal

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}+p(x)\,z=f(x).$$

Ejemplo 4.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x}+\frac{x^2}{2y},$$

$$2y\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{x}+x^2,\quad y^2=z,\quad 2y\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx},$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{z}{x}+x^2$$

y se prosigue como en el ejemplo 1 de la pág. 32.

La ecuación

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y+q(x)y^2=f(x),$$

llamada *ecuación de Riccati*, en general no se integra en cuadraturas, pero por sustitución de variables puede ser transformada en una ecuación de Bernoulli, si se conoce una solución particular $y_1(x)$ de esta ecuación. Efectivamente, haciendo $y=y_1+z$, se obtiene

$$y_1'+z'+p(x)(y_1+z)+q(x)(y_1+z)^2=f(x)$$

o, como $y_1'+p(x)y_1+q(x)y_1^2\equiv f(x)$, tendremos la ecuación de Bernoulli

$$z'+[p(x)+2q(x)y_1]z+q(x)z^2=0.$$

Ejemplo 5.

$$\frac{dy}{dx}=y^2-\frac{2}{x^2}.$$

En este ejemplo no es difícil hallar la solución particular $y_1=\frac{1}{x}$. Haciendo $y=z+\frac{1}{x}$, obtenemos $y'=z'-\frac{1}{x^2}$, $z'-\frac{1}{x^2}=\left(z+\frac{1}{x}\right)^2-\frac{2}{x^2}$, o bien $z'=z^2+2\frac{z}{x}$, que es una ecuación de Bernoulli.

$$\frac{z'}{z^2}=\frac{2}{xz}+1,\qquad u=\frac{1}{z},\quad \frac{du}{dx}=-\frac{z'}{z^2},$$

$$\frac{du}{dx}=-\frac{2u}{x}-1,\quad \frac{du}{u}=-\frac{2dx}{x},$$

$$\ln|u|=-2\ln|x|+\ln c,\ u=\frac{c}{x^2},\quad u=\frac{c(x)}{x^2},$$

$$\frac{c'(x)}{x^2}=-1,\ c(x)=-\frac{x^3}{3}+c_1,$$

$$u=\frac{c_1}{x^2}-\frac{x}{3},\quad \frac{1}{z}=\frac{c_1}{x^2}-\frac{x}{3},\quad \frac{1}{y-\frac{1}{x}}=\frac{c_1}{x^2}-\frac{x}{3},$$

$$y=\frac{1}{x}+\frac{3x^2}{c_1-x^3}.$$

§ 5. ECUACIONES EN DIFERENCIALES TOTALES

Puede suceder que el primer miembro de la ecuación diferencial

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \qquad (1.14)$$

sea la diferencial total de cierta función $u(x, y)$:

$$du(x, y) = M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$$

y que, por consiguiente, la ecuación (1.14) tome la forma

$$du(x, y) = 0.$$

Si la función $y(x)$ es solución de la ecuación (1.14), entonces

$$du(x, y(x)) \equiv 0,$$

de donde

$$u(x, y(x)) = c, \qquad (1.15)$$

donde c es una constante. Recíprocamente, si cierta función $y(x)$ convierte en identidad la ecuación finita (1.15), entonces, derivando la identidad obtenida, tendremos $du(x, y(x)) = 0$ y, por consiguiente, $u(x, y) = c$, donde c es una constante arbitraria, es integral general de la ecuación inicial.

Si las condiciones iniciales $y(x_0) = y_0$ están dadas, la constante c se determina de (1.15): $c = u(x_0, y_0)$ y

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) \qquad (1.15_1)$$

es la integral particular buscada. Si $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) \neq 0$ en el punto (x_0, y_0), entonces la ecuación (1.15_1) determina y como función implícita de x.

Para que el primer miembro de la ecuación (1.14)

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$$

sea la diferencial total de cierta función $u(x, y)$, como se sabe, es necesario y suficiente que

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}. \qquad (1.16)$$

Si esta condición, señalada por primera vez por Euler, se cumple, entonces la ecuación (1.14) se integra fácilmente. En efecto,

$$du = M\,dx + N\,dy.$$

Por otra parte,

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Por consiguiente,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M(x, y); \quad \frac{\partial u}{\partial y}=N(x, y),$$

de donde

$$u(x, y)=\int M(x, y)\,dx+c(y).$$

Al calcular la integral $\int M(x, y)\,dx$, la magnitud y se considera constante; por eso, $c(y)$ es una función arbitraria de y.

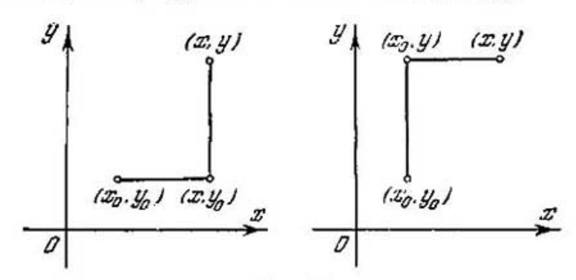


Fig. 1.10

Para determinar la función $c(y)$, derivamos la función hallada $u(x, y)$ respecto a y y, como $\frac{\partial u}{\partial y}=N(x, y)$, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x, y)\,dx\right)+c'(y)=N(x, y).$$

De esta ecuación se determina $c'(y)$, e integrando se halla $c(y)$.

Como es sabido del curso de análisis matemático, se puede determinar aún más fácilmente la función $u(x, y)$ por su diferencial total $du=M(x, y)\,dx+N(x, y)\,dy$, tomando la integral curvilínea de $M(x, y)\,dx+N(x, y)\,dy$ desde cierto punto fijo (x_0, y_0) hasta un punto con coordenadas variables (x, y), por cualquier camino:

$$u(x, y)=\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} M(x, y)\,dx+N(x, y)\,dy.$$

Con frecuencia, en calidad de camino de integración es cómodo tomar una línea quebrada, compuesta por dos segmentos paralelos a los ejes de coordenadas (fig. 1.10); en este caso

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} M\,dx+N\,dy=\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y_0)} M\,dx+\int_{(x, y_0)}^{(x, y)} N\,dy,$$

o bien

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} M\,dx + N\,dy = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_0, y)} N\,dy + \int_{(x_0, y)}^{(x, y)} M\,dx.$$

Ejemplo 1.

$$(x+y+1)\,dx+(x-y^2+3)\,dy=0.$$

El primer miembro de la ecuación es la diferencial total de cierta función $u(x, y)$, puesto que

$$\frac{\partial(x+y+1)}{\partial y} \equiv \frac{\partial(x-y^2+3)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=x+y+1, \quad u=\frac{x^2}{2}+xy+x+c(y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x+c'(y), \quad x+c'(y)=x-y^2+3,$$

$$c'(y)=-y^2+3, \quad c(y)=-\frac{y^3}{3}+3y+c_1,$$

$$u=\frac{x^2}{2}+xy+x-\frac{y^3}{3}+3y+c_1.$$

Por lo tanto, la integral general tiene la forma

$$3x^2+6xy+6x-2y^3+18y=c_2. \tag{1.17}$$

Se puede utilizar también el otro método de determinación de la función $u(x, y)$:

$$u(x, y)=\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (x+y+1)\,dx+(x-y^2+3)\,dy.$$

Como punto inicial (x_0, y_0) escogemos, por ejemplo, el origen de coordenadas, y en calidad de camino de integración, la quebrada de la fig. 1.11. Entonces

$$u(x, y)=\int_{(0, 0)}^{(x, 0)} (x+1)\,dx+\int_{(x, 0)}^{(x, y)} (x-y^2+3)\,dy=\frac{x^2}{2}+x+xy-\frac{y^3}{3}+3y$$

y la integral general tiene la forma

$$\frac{x^2}{2}+x+xy-\frac{y^3}{3}+3y=c,$$

o bien como en (1.17).

En algunos casos, si el primer miembro de la ecuación

$$M(x, y)\,dx+N(x, y)\,dy=0 \tag{1.14}$$

no es diferencial total, resulta fácil escoger una función $\mu(x, y)$, luego del producto por la cual el primer miembro de (1.14) se transforma en una diferencial total:

$$du=\mu M\,dx+\mu N\,dy.$$

Esta función μ se llama *factor integrante*. Obsérvese que la multiplicación por el factor integrante $\mu(x, y)$ puede conducir a que aparezcan soluciones particulares superfluas, que reducen este factor a cero.

Ejemplo 2.

$$x\,dx + y\,dy + (x^2 + y^2)\,x^2\,dx = 0.$$

Es evidente que después de multiplicar por el factor $\mu = \frac{1}{x^2 + y^2}$, el primer miembro se transforma en diferencial total. Efectivamente, luego del producto por $\mu = \frac{1}{x^2 + y^2}$, obtenemos

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} + x^2\,dx = 0,$$

o integrando: $\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + \frac{x^3}{3} = \ln c_1$. Multiplicando por 2 y potenciando, tendremos

$$(x^2 + y^2)\,e^{\frac{2}{3}x^3} = c.$$

Es claro que no siempre el factor integrante se escoge tan fácilmente. En general, para hallar dicho factor es necesario escoger por lo menos una solución particular no idénticamente nula de la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial \mu M}{\partial y} = \frac{\partial \mu N}{\partial x}$$

o, en forma desarrollada,

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} N + \mu \frac{\partial N}{\partial x},$$

la cual, después de dividir entre μ y de cambiar de miembro algunos términos, se reduce a

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} M - \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} N = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}. \quad (1.18)$$

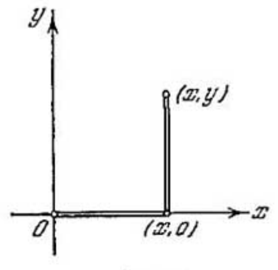


Fig. 1.11

En general, la integración de esta ecuación en derivadas parciales no es un problema menos simple que la integración de la ecuación inicial. Sin embargo, a veces la elección de la solución particular de (1.18) no presenta dificultades.

Aparte de ello, considerando que el factor integrante es función de un solo argumento (por ejemplo, es función sólo de $x + y$ o de $x^2 + y^2$, o función sólo de x o de y, etc.), se puede integrar ya sin dificultad la ecuación (1.18) e indicar las condiciones bajo las cuales existe un factor integrante del tipo considerado. Con esto se obtie-

nen clases de ecuaciones para las cuales el factor integrante puede ser hallado fácilmente.

Por ejemplo, encontremos las condiciones bajo las cuales la ecuación $M\,dx+N\,dy=0$ tiene factor integrante que depende sólo de x, $\mu=\mu(x)$. En este caso, la ecuación (1.18) se simplifica y toma la forma

$$-\frac{d\ln\mu}{dx}N=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y},$$

de donde, considerando $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ función continua de x, obtenemos

$$\ln\mu=\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}\,dx+\ln c,$$

$$\mu=ce^{\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}\,dx} \qquad (1.19)$$

Se puede considerar $c=1$, ya que es suficiente tener sólo un factor integrante.

Si $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ es función sólo de x, entonces existe un factor integrante que depende sólo de x, y es igual a (1.19). En caso contrario, no existe ningún factor de la forma $\mu(x)$.

La condición de existencia de un factor integrante que depende sólo de x se cumple, por ejemplo, para la ecuación lineal

$$\frac{dy}{dx}+p(x)\,y=f(x), \quad \text{o bien} \quad [p(x)\,y-f(x)]\,dx+dy=0.$$

Efectivamente, $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=p(x)$ y, por lo tanto, $\mu=e^{\int p(x)\,dx}$. De manera análoga se pueden hallar las condiciones de existencia de factores integrantes de la forma

$$\mu(y),\ \mu(x\pm y),\ \mu(x^2\pm y^2),\ \mu(xy),\ \mu\left(\frac{y}{x}\right) \text{ etc.}$$

Ejemplo 3. ¿Tiene la ecuación

$$x\,dx+y\,dy+x\,dy-y\,dx=0 \qquad (1.20)$$

un factor integrante de la forma $\mu=\mu(x^2+y^2)$?

Designemos $x^2+y^2=z$. La ecuación (1.18) para $\mu=\mu(x^2+y^2)=\mu(z)$ toma la forma

$$2(My-Nx)\frac{d\ln\mu}{dz}=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y},$$

de donde

$$\ln|\mu| = \frac{1}{2}\int \varphi(z)\,dz + \ln c,$$

o bien

$$\mu = ce^{\frac{1}{2}\int \varphi(z)\,dz} \qquad (1.21)$$

donde

$$\varphi(z) = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{My - Nx}.$$

Para la existencia de un factor integrante del tipo dado, es necesario —y, en caso de que $\varphi(z)$ sea continua, suficiente— que $\dfrac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{My - Nx}$ sea función sólo de $x^2 + y^2$. En nuestro caso,

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{My - Mx} = -\frac{2}{x^2 + y^2};$$

por lo tanto, el factor integrante $\mu = \mu(x^2 + y^2)$ existe y es igual a (1.21). Para $c = 1$, obtenemos:

$$\mu = e^{-\int \frac{dz}{z}} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

Multiplicando la ecuación (1.20) por $\mu = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$, la reducimos a la forma

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} + \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = 0,$$

o bien

$$\frac{\frac{1}{2}d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} + \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = 0,$$

$$\frac{1}{2}d\ln(x^2 + y^2) + d\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} = 0.$$

Integrando, obtenemos

$$\ln\sqrt{x^2 + y^2} = -\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} + \ln c$$

y, luego de potenciar, tendremos

$$\sqrt{x^2 + y^2} = ce^{-\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}},$$

o, en coordenadas polares $\rho = ce^{-\varphi}$, que es una familia de espirales logarítmicas.

Ejemplo 4. Hallar la forma de un espejo que refleje paralelamente a una dirección dada todos los rayos que salen de un punto fijo.

Coloquemos el origen de coordenadas en el punto dado, y dirijamos el eje de las abscisas paralelamente a la dirección indicada en las condiciones del problema.

Supongamos que un rayo incide en el espejo en el punto $M(x, y)$. Consideremos el corte del espejo, representado en la fig. 1.12, por el plano Oxy, que pasa por el eje de las abscisas y por el punto M. Tracemos la tangente MN al corte considerado de la superficie del espejo en el punto $M(x, y)$. Puesto que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión, el triángulo MNO es isósceles. Por lo tanto,

$$\operatorname{tg}\varphi = y' = \frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}.$$

La ecuación homogénea obtenida se integra fácilmente con el cambio de variables

$$\frac{x}{y} = z,$$

Fig. 1.12

pero puede hacerse de manera aún más simple: racionalizando el denominador la escribimos en la forma

$$x\,dx + y\,dy = \sqrt{x^2+y^2}\,dx.$$

La ecuación tiene el factor integrante evidente

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = dx, \quad \sqrt{x^2+y^2} = x+c, \quad y^2 = 2cx + c^2$$

(familia de parábolas).

Observación. Este problema se resuelve aún más fácilmente en coordenadas x y ρ, donde $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$. En este caso, la ecuación del corte de las superficies buscadas toma la forma

$$dx = d\rho, \quad \rho = x + c.$$

Se puede demostrar la existencia del factor integrante, o lo que es lo mismo, la existencia de una solución no nula de la ecuación en derivadas parciales (1.18) (véase la pág. 38) en cierta región, si las funciones M y N tienen derivadas continuas y por lo menos una de estas funciones no es igual a cero. Por lo tanto, el método del factor integrante se puede considerar como un método general de integración de la ecuación del tipo

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0.$$

Sin embargo, debido a la dificultad de hallar el factor integrante, este método se utiliza con mayor frecuencia sólo en aquellos casos en que dicho factor es evidente.

§ 6. TEOREMAS DE EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCION DE LA ECUACION $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

La clase de las ecuaciones diferenciales integrables en cuadraturas es sumamente limitada; por ello, ya desde los tiempos de Euler obtuvieron gran importancia los métodos aproximados en la teoría de ecuaciones diferenciales.

En la actualidad, gracias al rápido desarrollo de la técnica de cálculo, los métodos de aproximación adquieren un valor incomparablemente mayor.

Ahora, a menudo resulta conveniente utilizar métodos aproximados aún en los casos en que la ecuación se integra en cuadraturas. Es más, aún si la solución puede ser expresada en forma sencilla en funciones elementales, frecuentemente la utilización de las tablas de estas funciones resulta más difícil que la integración aproximada de la ecuación en calculadoras electrónicas. Sin embargo, para aplicar uno u otro método de integración aproximada de la ecuación diferencial, hay que estar seguro ante todo de la existencia de la solución buscada, así como de la unicidad de la misma, ya que cuando no tiene lugar la unicidad, no queda claro cuál solución debe ser determinada aproximadamente.

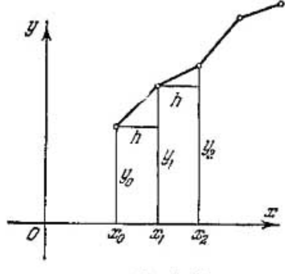


Fig. 1.13

Con gran frecuencia la demostración de teoremas de existencia de la solución da también un método para la determinación exacta o aproximada de la solución, lo cual aumenta aún más la importancia de los teoremas de existencia. Por ejemplo el teorema (1.1), demostrado más adelante, da la fundamentación del *método de Euler* de integración aproximada de ecuaciones diferenciales. Este método consiste en que la curva integral buscada de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx}=f(x,\ y)$, que pasa por el punto $(x_0,\ y_0)$, se sustituye por una quebrada constituida por segmentos lineales (fig. 1. 13), cada uno de los cuales es tangente a la curva integral en uno de sus puntos frontera. Al aplicar este método para el cálculo aproximado del valor de la solución buscada $y(x)$ en el punto $x=b$, el segmento $x_0 \leqslant x \leqslant b$ (si $b > x_0$) se divide en n partes iguales por medio de los puntos $x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n$, donde $x_n=b$. La longitud de cada segmento $x_{i+1}-x_i=h$ se llama *paso del cálculo*. El valor aproximado de la solución buscada en los puntos x_i se designará por y_i.

Para el cálculo de y_1 se sustituye en el intervalo $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ la curva integral buscada por el segmento de su tangente en el punto $(x_0,\ y_0)$. Por lo tanto, $y_1=y_0+hy'_0$, donde $y'_0=f(x_0,\ y_0)$ (véase la fig. 1.13). En forma análoga, calculamos

$$y_2=y_1+hy'_1,\ \text{donde}\ y'_1=f(x_1,\ y_1);$$

$$y_3 = y_2 + hy_2', \text{ donde } y_2' = f(x_2, y_2);$$

. . . .

$$y_n = y_{n-1} + hy_{n-1}', \text{ donde } y_{n-1}' = f(x_{n-1}, y_{n-1}).$$

Si $b < x_0$, el esquema del cálculo permanece invariable, pero el paso h es negativo.

Es natural esperar que para $h \to 0$ *las quebradas de Euler* se aproximen a la gráfica de la curva integral buscada. Por lo tanto, al disminuir el paso h el método de Euler da un valor cada vez más exacto de la solución buscada en el punto b. La demostración de esta afirmación nos conduce al mismo tiempo al siguiente teorema fundamental de existencia y unicidad de la solución de la ecuación $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ con la condición inicial $y(x_0) = y_0$, bajo condiciones suficientes muy amplias impuestas a la función $f(x,y)$.

Teorema 1.1 (de existencia y unicidad de la solución). *Si en la ecuación*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1.22}$$

la función $f(x, y)$ es continua en el rectángulo D:

$$x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a, \quad y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b,$$

y satisface en D la condición de Lipschitz:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant N |y_1 - y_2|,$$

donde N es una constante, entonces existe una solución única $y = \bar{y}(x)$, $x_0 - H \leqslant x \leqslant x_0 + H$ de la ecuación (1.22), *que satisface la condición $y(x_0) = y_0$, donde*

$$H < \min\left(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{N}\right)$$

$$M = \max|f(x, y)| \text{ en } D.$$

Las condiciones del teorema necesitan ciertas aclaraciones. No es posible afirmar que la solución buscada $y = \bar{y}(x)$ de la ecuación (1.22), que satisface la condición $y(x_0) = y_0$, existirá para $x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a$, ya que la curva integral $y = \bar{y}(x)$ puede salir del rectángulo D a través de sus lados superior o inferior $y = y_0 \pm b$ (fig. 1.14) para cierto valor $x = x_1$, $x_0 - a < x_1 < x_0 + a$, y entonces, si $x_1 > x_0$, para $x > x_1$ la solución puede no estar definida (si $x_1 < x_0$, la solución puede no estar definida para $x < x_1$). Podemos garantizar que la curva integral $y = \bar{y}(x)$ no sale de los límites de D cuando x varía en el segmento $x_0 - H \leqslant x \leqslant x_0 + H$, donde H es el menor de los números a y $\frac{b}{M}$

(fig. 1.15), puesto que el coeficiente angular de la tangente a la curva integral buscada se encuentra entre los coeficientes angulares M y $-M$ de las rectas representadas en la figura 1.15. Si estas rectas, entre las cuales se encuentra la curva integral buscada, salen de los límites de rectángulo D a través de sus lados horizontales $y=y_0\pm b$, entonces las abscisas de los puntos de corte de estos lados serán $x_0\pm\frac{b}{M}$. Por lo tanto, la abscisa del punto

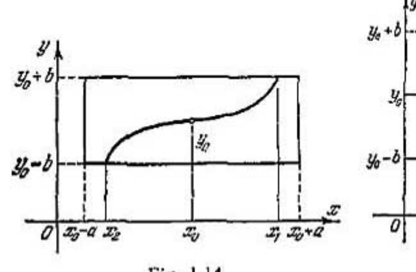


Fig. 1.14

Fig. 1.15

de salida de la curva integral del rectángulo D puede ser sólo menor que o igual a $x_0+\frac{b}{M}$, y mayor que o igual a $x_0-\frac{b}{M}$.

Se puede demostrar la existencia de la solución buscada en el segmento $x_0-H\leqslant x\leqslant x_0+H$, donde $H=\min\left(a, \frac{b}{M}\right)$; sin embargo, es más sencillo demostrar antes la existencia de la solución en el segmento $x_0-H\leqslant x\leqslant x_0+H$, donde $H<\min\left(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{N}\right)$. Más adelante serán indicadas condiciones, bajo las cuales la solucion puede ser continuada.

La condición de Lipschitz

$$|f(x, y_1)-f(x, y_2)|\leqslant N|y_1-y_2|$$

puede ser sustituida por otra, un tanto más grosera, pero en cambio a menudo fácilmente comprobable: la condición de existencia de la derivada parcial acotada $f'_y(x, y)$ en la región D.

En efecto, si en el rectángulo D

$$|f'_y(x, y)|\leqslant N$$

entonces, aplicando el teorema sobre el incremento, finito, obtenemos

$$|f(x, y_1)-f(x, y_2)|=|f'_y(x, \xi)|\cdot|y_1-y_2|,$$

donde ξ es un valor intermedio entre y_1 e y_2. Por lo tanto, el punto (x, ξ) se encuentra en D; por eso

$$|f'_y(x, \xi)| \leqslant N, \text{ y } \quad |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant N|y_1 - y_2|.$$

No es difícil presentar ejemplos de funciones $f(x, y)$ (por ejemplo $f(x, y) = |y|$ en un entorno de los puntos $(x, 0)$), para las cuales la condición de Lipschitz se cumple, pero la derivada $\frac{\partial f}{\partial y}$ en ciertos puntos no existe; por lo tanto, la condición $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leqslant N$ es más grosera que la condición de Lipschitz.

D e m o s t r a c i ó n d e l t e o r e m a d e e x i s t e n c i a y u n i c i d a d. Sustituyamos la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1.22}$$

con condición inicial

$$y(x_0) = y_0 \tag{1.23}$$

por la ecuación integral equivalente

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx. \tag{1.24}$$

En efecto, si cierta función $y = \bar{y}(x)$ al ser sustituida en la ecuación (1.22) la convierte en una identidad, y satisface a la condición (1.23), entonces integrando la identidad (1.22) y tomando en cuenta la condición (1.23), obtenemos que $y = \bar{y}(x)$ convierte también en identidad la ecuación (1.24). Si, en cambio, cierta función $y = \bar{y}(x)$ al ser sustituida en la ecuación (1.24) la convierte en una identidad, entonces es evidente que ella satisface también a la condición (1.23) y, derivando la identidad (1.24), obtenemos que $y = \bar{y}(x)$ convierte también en identidad la ecuación (1.22).

Construyamos la quebrada de Euler $y = y_n(x)$ que parte del punto (x_0, y_0) con un paso $h_n = \frac{H}{n}$ en el segmento $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H$, n es un entero positivo (en forma completamente análoga se demuestra la existencia de solución en el segmento $x_0 - H \leqslant x \leqslant x_0$). La quebrada de Euler que pasa por el punto (x_0, y_0) no puede salir de la región D para $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H$ (o bien $x_0 - H \leqslant x \leqslant x_0$), ya que el coeficiente angular de cada segmento de la quebrada es menor que M en valor absoluto.

La demostración subsiguiente del teorema la dividiremos en tres etapas:

1) *La sucesión $y_n = y_n(x)$ es uniformemente convergente.*

2) *La función* $\bar{y}(x)=\lim_{n\to\infty} y_n(x)$ *es la solución de la ecuación integral* (1.24).

3) *La solución* $\bar{y}(x)$ *de la ecuación* (1.24) *es única.*

Demostración de 1). Por definición de la quebrada de Euler

$$y'_n(x)=f(x_k,\ y_k) \text{ para } x_k\leqslant x\leqslant x_{k+1},\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$$

(en el punto angular x_k se toma la derivada derecha), o

$$y'_n(x)=f(x,\ y_n(x))+[f(x_k,\ y_k)-f(x,\ y_n(x))]; \qquad (1.25)$$

denotemos

$$f(x_k,\ y_k)-f(x,\ y_n(x))=\eta_n(x).$$

En virtud de la continuidad uniforme de la función $f(x,\ y)$ en D, obtenemos

$$|\eta_n(x)|=|f(x_k,\ y_k)-f(x,\ y_n(x))|\leqslant\varepsilon_n, \qquad (1.26)$$

si $n>N(\varepsilon_n)$, donde $\varepsilon_n\to 0$ cuando $n\to\infty$, puesto que $|x-x_k|\leqslant h_n$, y $|y_k-y_n(x)|<Mh_n$, donde $h_n=\frac{H}{n}\to 0$ para $n\to\infty$.

Integrando (1.25) con respecto a x entre los límites desde x_0 hasta x, y teniendo en cuenta que $y_n(x_0)=y_0$, obtenemos

$$y_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,\ y_n(t))\,dt+\int_{x_0}^{x}\eta_n(t)\,dt. \qquad (1.27)$$

Aquí n puede tomar cualquier valor entero positivo; por lo tanto, para un entero $m>0$,

$$y_{n+m}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,\ y_{n+m}(t))\,dt+\int_{x_0}^{x}\eta_{n+m}(t)\,dt. \qquad (1.28)$$

Restando (1.27) miembro a miembro de (1.28) y tomando el módulo de la diferencia, obtenemos

$$|y_{n+m}(x)-y_n(x)|=\Big|\int_{x_0}^{x}[f(t,\ y_{n+m}(t))-f(t,\ y_n(t))]\,dt+$$
$$+\int_{x_0}^{x}\eta_{n+m}(t)\,dt-\int_{x_0}^{x}\eta_n(t)\,dt\Big|\leqslant$$
$$\leqslant\int_{x_0}^{x}|f(t,\ y_{n+m}(t))-f(t,\ y_n(t))|\,dt+$$
$$+\int_{x_0}^{x}|\eta_{n+m}(t)|\,dt+\int_{x_0}^{x}|\eta_n(t)|\,dt,$$

si $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H$ ó, tomando en cuenta (1.26) y la condición de Lipschitz:

$$|y_{n+m}(x) - y_n(x)| \leqslant N \int_{x_0}^{x} |y_{n+m}(t) - y_n(t)|\, dt + (\varepsilon_{n+m} + \varepsilon_n) \cdot H.$$

Por lo tanto,

$$\max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H} |y_{n+m}(x) - y_n(x)| \leqslant$$

$$\leqslant N \max \int_{x_0}^{x} |y_{n+m}(t) - y_n(t)|\, dt + (\varepsilon_{n+m} + \varepsilon_n) \cdot H,$$

de donde

$$\max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H} |y_{n+m}(x) - y_n(x)| \leqslant \frac{(\varepsilon_{n+m} - \varepsilon_n) H}{1 - NH} < \varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$ y para un número suficientemente grande $n > N_1(\varepsilon)$.

De este modo,

$$\max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H} |y_{n+m}(x) - y_n(x)| < \varepsilon$$

para $n > N_1(\varepsilon)$, es decir, la sucesión de funciones continuas $y_n(x)$ es uniformemente convergente en $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H$:

$$y_n(x) \rightrightarrows \bar{y}(x),$$

donde $\bar{y}(x)$ es una función continua.

Demostración de 2). Pasemos al límite en la ecuación (1.27) cuando $n \to \infty$:

$$\lim_{n \to \infty} y_n(x) = y_0 + \lim_{n \to \infty} \int_{x_0}^{x} f(x, y_n(x))\, dx + \lim_{n \to \infty} \int_{x_0}^{x} \eta_n(x)\, dx,$$

o bien

$$\bar{y}(x) = y_0 + \lim_{n \to \infty} \int_{x_0}^{x} f(x, y_n(x))\, dx + \lim_{n \to \infty} \int_{x_0}^{x} \eta_n(x)\, dx. \quad (1.29)$$

En virtud de la convergencia uniforme de $y_n(x)$ a $\bar{y}(x)$ y de la continuidad uniforme de la función $f(x, y)$ en D, la sucesión $f(x, y_n(x)) \rightrightarrows f(x, \bar{y}(x))$.

En efecto,

$$|f(x, \bar{y}(x)) - f(x, y_n(x))| < \varepsilon,$$

donde $\varepsilon > 0$, si $|\bar{y}(x) - y_n(x)| < \delta(\varepsilon)$; pero $|\bar{y}(x) - y_n(x)| < \delta(\varepsilon)$ si $n > N_1(\delta(\varepsilon))$ para todas las x del segmento $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H$.

De este modo, $|f(x, \bar{y}(x)) - f(x, y_n(x))| < \varepsilon$ para $n > N_1(\delta(\varepsilon))$, donde N_1 no depende de x.

En base a la convergencia uniforme de la sucesión $f(x, y_n(x))$ a $f(x, \bar{y}(x))$, en (1.29) es posible el paso al límite dentro del signo de integral. Tomando en cuenta, además que $|\eta_n(x)| < \varepsilon_n$, donde $\varepsilon_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, obtenemos en definitiva en (1.29):

$$\bar{y}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \bar{y}(x))\, dx.$$

De esta manera, $\bar{y}(x)$ satisface a la ecuación (1.24).

D e m o s t r a c i ó n de 3). Supongamos la existencia de dos soluciones distintas $y_1(x)$ e $y_2(x)$ de la ecuación (1.24). Entonces

$$\max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H} |y_1(x) - y_2(x)| \neq 0.$$

Restando miembro a miembro de la identidad

$$y_1(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1(x))\, dx$$

la identidad

$$y_2(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_2(x))\, dx,$$

se obtiene

$$y_1(x) - y_2(x) \equiv \int_{x_0}^{x} [f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))]\, dx.$$

Por lo tanto,

$$\max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H} |y_1(x) - y_2(x)| =$$

$$= \max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H} \left| \int_{x_0}^{x} [f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))]\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H} \left| \int_{x_0}^{x} |f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))|\, dx \right|.$$

Aplicando la condición de Lipschitz, tendremos

$$\max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H} |y_1(x) - y_2(x)| \leqslant N \max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H} \left| \int_{x_0}^{x} |y_1(x) - y_2(x)|\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant N \max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H} |y_1(x) - y_2(x)| \max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H} \left| \int_{x_0}^{x} dx \right| =$$

$$= NH \max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H} |y_1(x) - y_2(x)|.$$

La desigualdad obtenida

$$\max_{x_0\leqslant x\leqslant x_0+H}|y_1(x)-y_2(x)|\leqslant NH\max_{x_0\leqslant x\leqslant x_0+H}|y_1(x)-y_2(x)| \quad (1.30)$$

es contradictoria si $\max\limits_{x_0\leqslant x\leqslant x_0+H}|y_1(x)-y_2(x)|\neq 0$, puesto que por la hipótesis del teorema $H<\frac{1}{N}$, y de (1.30) se deduce que $NH\geqslant 1$.

La contradicción cesa sólo si

$$\max_{x_0\leqslant x\leqslant x_0+H}|y_1(x)-y_2(x)|=0,$$

es decir, si $y_1(x)\equiv y_2(x)$ para $x_0\leqslant x\leqslant x_0+H$.

Observación 1. La existencia de la solución de la ecuación (1.22) se podría demostrar de otra manera sólo suponiendo que la función $f(x, y)$ es continua (sin la condición de Lipschitz); sin embargo, la sola continuidad de esta función no es suficiente para demostrar la unicidad de la solución.

Observación 2. La existencia y la unicidad de la solución $y=y(x)$ se han demostrado sólo en el segmento $x_0-H\leqslant x\leqslant x_0+H$; no obstante, tomando el punto $(x_0+H,\ y(x_0+H))$ como inicial, se puede repetir el razonamiento anterior y continuar la solución en un segmento más de longitud H_1, si, claro está, en un entorno del nuevo punto inicial se cumplen las condiciones del teorema de existencia y unicidad de la solución. Prosiguiendo este proceso, en ciertos casos se puede continuar la solución en todo el semieje $x\geqslant x_0$, o aún en todo el eje $-\infty<x<\infty$, si se continúa la solución también en el sentido negativo del eje x. Sin embargo, son posibles también otros casos, aún cuando la función $f(x, y)$ esté determinada para valores cualesquiera de x e y.

Es posible que la curva integral no pueda ser continuada debido al acercamiento a un punto donde no se cumplen las condiciones del teorema de existencia y unicidad de la solución, o a que la curva integral se aproxima a una asíntota paralela al eje Oy.

Estas posibilidades se ilustran con los ejemplos siguientes:

1) $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$, $y(0)=1$. Separando variables e integrando, obtenemos

$$x^2+y^2=c^2,\quad y=\pm\sqrt{c^2-x^2},\quad c=1,\quad y=\sqrt{1-x^2}.$$

La solución no se puede continuar fuera de los límites del intervalo $-1<x<1$. En los puntos frontera $(-1, 0)$ y $(1, 0)$ el segundo miembro de la ecuación $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$ es discontinuo. Las condiciones del teorema de existencia y unicidad de la solución no se cumplen (fig. 1.16).

2) $\frac{dy}{dx}=y^2$, $y(1)=1$. Separando variables e integrando, se obtiene

$$y=-\frac{1}{x-c},\quad c=2,\quad y=-\frac{1}{x-2}.$$

y la curva integral puede ser continuada sólo hasta la asíntota $x=2$ $(-\infty<x<2)$ (fig. 1.17).

En la actualidad los teoremas de existencia y unicidad de las soluciones no sólo de ecuaciones diferenciales, sino también de ecuaciones de otros tipos, se demuestran muy frecuentemente por el método de los puntos fijos. Uno de los teoremas más sencillos sobre puntos fijos es el principio de las transformaciones de contracción*).

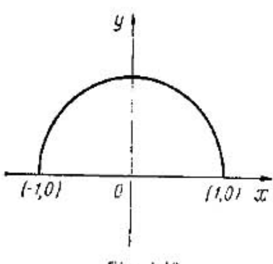


Fig. 1.16

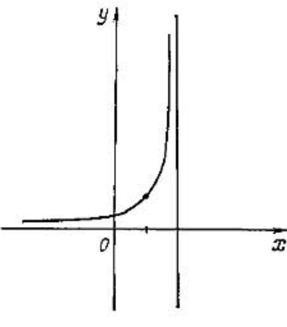


Fig. 1.17

Principio de las transformaciones de contracción. *Si en un espacio métrico**) completo***) M está dado un operador A, que satisface las siguientes condiciones:*

1) *el operador A transforma los puntos del espacio M en puntos del mismo espacio: si $y\in M$, entonces $A[y]\in M$;*

2) *el operador A acerca los puntos; más exactamente,*

$$\rho(A[y],\ A[z])\leqslant\alpha\rho(y,\ z),$$

donde y y z son puntos cualesquiera del espacio M; $\alpha<1$ y no depende de la elección de y y de z; $\rho(y,\ z)$ es la distancia entre

*) También llamado principio de Caccíopolli-Banach (*N. del Red.*)

**) El espacio M se llama *métrico*, si en éste está definida una función $\rho(y,\ z)$ de un par de puntos de dicho espacio que satisface, para puntos arbitrarios y, z y u de éste, las condiciones:

1) $\rho(y,\ z)\geqslant 0$; además $\rho(y,\ y)=0$, y $\rho(y,\ z)=0$ implica $y=z$;

2) $\rho(y,\ z)=\rho(z,\ y)$;

3) $\rho(y,\ z)\leqslant\rho(y,\ u)+\rho(u,\ z)$ (desigualdad triangular). La función ρ se llama *distancia* en el espacio M.

***) El espacio métrico M se llama *completo*, si cada sucesión fundamental de puntos del espacio M converge en éste. Recuérdese que la sucesión $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n,\ \ldots$ se llama fundamental si para cada $\varepsilon>0$ existe un número $N(\varepsilon)$ tal que para $n\geqslant N(\varepsilon)$ la distancia $\rho(y_n,\ y_{n+m})<\varepsilon$ para cualquier número entero $m>0$.

los puntos y y z en el espacio M, entonces existe un único punto fijo $\bar{y}$ del espacio M, $A[\bar{y}]=\bar{y}$. Este punto se puede hallar por el método de las aproximaciones sucesivas, es decir, $\bar{y}=\lim_{n\to\infty} y_n$, donde $y_n=A[y_{n-1}]$ $(n=1, 2, \ldots)$; el punto y_0 se escoge arbitrariamente en el espacio M.

Demostración. Demostremos que la sucesión

$$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$$

es fundamental. Valoremos la distancia entre los términos vecinos de esta sucesión:

$$\left.\begin{aligned}
&\rho(y_2, y_1)=\rho(A[y_1], A[y_0])\leqslant\alpha\rho(y_1, y_0),\\
&\rho(y_3, y_2)=\rho(A[y_2], A[y_1])\leqslant\alpha\rho(y_2, y_1)\leqslant\alpha^2\rho(y_1, y_0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\rho(y_{n+1}, y_n)=\rho(A[y_n], A[y_{n-1}])\leqslant\\
&\qquad\qquad\leqslant\alpha\rho(y_n, y_{n-1})\leqslant\alpha^n\rho(y_1, y_0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}\qquad(1.31)$$

Aplicando ahora $m-1$ veces la desigualdad triangular y utilizando las desigualdades (1.31), obtenemos

$$\rho(y_n, y_{n+m})\leqslant\rho(y_n, y_{n+1})+\rho(y_{n+1}, y_{n+2})+\ldots$$
$$\ldots+\rho(y_{n+m-1}, y_{n+m})\leqslant[\alpha^n+\alpha^{n+1}+\ldots+\alpha^{n+m-1}]\rho(y_1, y_0)=$$
$$=\frac{\alpha^n-\alpha^{n+m}}{1-\alpha}\rho(y_1, y_0)<\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(y_1, y_0)<\varepsilon$$

para un n suficientemente grande. Por lo tanto, la sucesión $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ es fundamental y, como el espacio M es completo, converge hacia un cierto elemento de ese mismo espacio: $\lim_{n\to\infty} y_n=\bar{y}$, $\bar{y}\in M$.

Demostremos ahora que $\bar{y}$ es un punto fijo. Sea $A[\bar{y}]=\bar{\bar{y}}$. Aplicando dos veces la desigualdad triangular, se obtiene

$$\rho(\bar{y}, \bar{\bar{y}})\leqslant\rho(\bar{y}, y_n)+\rho(y_n, y_{n+1})+\rho(y_{n+1}, \bar{\bar{y}}).$$

Para cualquier $\varepsilon>0$ se puede escoger un $N(\varepsilon)$ tal que para $n\geqslant N(\varepsilon)$:

1) $\rho(\bar{y}, y_n)<\frac{\varepsilon}{3}$, puesto que $\bar{y}=\lim_{n\to\infty} y_n$;

2) $\rho(y_n, y_{n+1})<\frac{\varepsilon}{3}$, ya que la sucesión y_n es fundamental;

3) $\rho(y_{n+1}, \bar{\bar{y}})=\rho(A[y_n], A[\bar{y}])\leqslant\alpha\rho(y_n, \bar{y})<\frac{\varepsilon}{3}$, de donde $\rho(\bar{y}, \bar{\bar{y}})<\varepsilon$, donde ε se puede escoger tan pequeño como se quiera.

Por lo tanto,

$$\rho(\bar{y}, \bar{\bar{y}}) = 0 \text{ e } \bar{y} = \bar{\bar{y}}, \ A[\bar{y}] = \bar{y}.$$

Queda por demostrar que el punto fijo $\bar{y}$ es único. Si existiera otro punto fijo $\bar{z}$, entonces sería $\rho(A[\bar{y}], A[\bar{z}]) = \rho(\bar{y}, \bar{z})$, lo que contradice a la condición 2) del teorema.

Apliquemos el principio de las transformaciones de contracción a la demostración del teorema de existencia y unicidad de la solución $y(x)$ $(x_0 - h_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h_0)$ de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ que satisface la condición $y(x_0) = y_0$, bajo la condición de que en la región D:

$$x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a, \ y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b$$

la función f sea continua y, por lo tanto, acotada, $|f| \leqslant M$, y satisfaga la condición de Lipschitz

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leqslant N |y - z|.$$

El número h_0 es $h_0 \leqslant \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, y será escogido con mayor exactitud más adelante.

Consideremos el espacio métrico completo C, cuyos puntos son todas las posibles funciones continuas $y(x)$, definidas en el segmento $x_0 - h_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h_0$, y cuyas gráficas se encuentran en D. La distancia se define por la igualdad

$$\rho(y, z) = \max |y - z|,$$

donde el máximo se escoge para todas las x del segmento

$$x_0 - h_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h_0.$$

Este espacio se considera con frecuencia en diferentes problemas del análisis matemático, y recibe el nombre de *espacio de convergencia uniforme*, ya que la convergencia en el sentido de la métrica de dicho espacio es la convergencia uniforme.

Sustituyamos la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ con la condición inicial $y(x_0) = y_0$ por la ecuación integral equivalente

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx. \tag{1.24}$$

Consideremos el operador

$$A[y] = y_0 + \int_{x_0} f(x, y)(x))\, dx,$$

que pone en correspondencia a cada función continua $y(x)$, dada en el segmento $x_0-h_0 \leqslant x \leqslant x_0+h_0$ y que no sale de D, la función continua $A[y]$, definida en ese mismo segmento y cuya gráfica tampoco sale de D, puesto que $\left|\int_{x_0}^{x} f(x, y)dx\right| \leqslant Mh_0 \leqslant b$. El operador $A[y]$, por lo tanto, satisface a la condición 1) del principio de las transformaciones de contracción.

Con esta notación, la ecuación (1.24) se escribe en la forma $y=A[y]$; por consiguiente, para la demostración del teorema de existencia y unicidad, queda por demostrar la existencia en el espacio C de un punto fijo único $\bar{y}(x)$ del operador A, puesto que en este caso tendremos $\bar{y}=A[\bar{y}]$ y la ecuación (1.24) será satisfecha.

Para la demostración del teorema queda por comprobar si el operador A satisface o no la condición 2) del principio de las transformaciones de contracción:

$$\rho(A[y],\ A[z]) \leqslant \alpha\rho(y,\ z),\ \alpha<1,$$

donde

$$\rho(A[y],\ A[z])=\max\left|\int_{x_0}^{x}[f(x,\ y)-f(x,\ z)]\,dx\right|.$$

Aplicando la desigualdad de Lipschitz, se obtiene

$$\rho(A[y],\ A[z]) \leqslant N\max\left|\int_{x_0}^{x}|y-z|\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant N\max|y-z|\max\left|\int_{x_0}^{x}dx\right|=Nh_0\max|y-z|=Nh_0\rho(y,\ z).$$

Tomando h_0 de manera que $Nh_0 \leqslant \alpha<1$, se logra que el operador A satisfaga la condición

$$\rho(A[y],\ A[z]) \leqslant \alpha\rho(y,\ z),\ \alpha<1.$$

De este modo, según el principio de las transformaciones de contracción, existe un puntón fijo único $\bar{y}(x)$ del operador A o, lo que es lo mismo, una solución continua única de la ecuación (1.24), la cual puede ser hallada por el método de las aproximaciones sucesivas.

De manera completamente análoga se puede demostrar el teorema de existencia y unicidad de la solución $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)$ del sistema de ecuaciones

$$\frac{dy_i}{dx}=f_i(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n),\ y_i(x_0)=y_{i0}\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \quad (1.32)$$

o bien

$$y_i=y_{i0}+\int_{x_0}^{x} f_i(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)\,dx\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \quad (1.33)$$

suponiendo que en la región D, definida por las desigualdades

$$x_0-a\leqslant x\leqslant x_0+a,\ y_{i0}-b_i\leqslant y_i\leqslant y_{i0}+b_i\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

los segundos miembros de las ecuaciones (1.32) satisfacen las condiciones:

1) todas las funciones $f_i(x,\ y_1,\ y_2\ \ldots,\ y_n)$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ son continuas y, por lo tanto, acotadas, $|f_i|\leqslant M$;

2) todas las funciones $f_i\,(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ satisfacen la condición de Lipschitz:

$$|f_i(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)-f_i(x,\ z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n)|\leqslant N\sum_{i=1}^{n}|y_i-z_i|.$$

Un punto en el espacio C será ahora un sistema de n funciones continuas $(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)$ o sea, una función vectorial n-dimensional $Y(x)$ de coordenadas $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)$, definida en el segmento $x_0-h_0\leqslant x\leqslant x_0+h_0$, donde $h_0\leqslant \min\left(a,\ \frac{b_1}{M},\ \ldots,\ \frac{b_n}{M}\right)$ y será escogido más adelante con mayor exactitud. La distancia en el espacio C se define por la igualdad

$$\rho\,(Y(x),\ Z(x))=\sum_{i=1}^{n}\max|y_i-z_i|,$$

donde $z_1,\ z_2\ \ldots,\ z_n$ son las coordenadas de la función vectorial $Z(x)$.

No es difícil comprobar que con esta definición de la distancia el conjunto C de funciones vectoriales n-dimensionales $Y(x)$ se transforma en un espacio métrico completo. El operador A se define por la igualdad

$$A[Y]=\left(y_{10}+\int_{x_0}^{x} f_1(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)\,dx,\right.$$

$$\left. y_{20}+\int_{x_0}^{x} f_2(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)\,dx,\ \ldots,\ y_{n0}+\int_{x_0}^{x} f_n(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)\,dx\right),$$

o sea, que al actuar dicho operador sobre el punto $(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)$, se obtiene un punto del mismo espacio C de coordenadas iguales a los segundos miembros del sistema (1.33).

El punto $A[Y]$ pertenece al espacio C, puesto que todas sus coordenadas son funciones continuas que no salen de la región D,

si las coordenadas de la función vectorial Y tampoco salen de D.

En efecto,

$$\left|\int_{x_0}^{x} f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)\,dx\right| \leqslant M\left|\int_{x_0}^{x} dx\right| \leqslant Mh_0 \leqslant b_i,$$

y, por lo tanto, $|y_i - y_{i0}| \leqslant b_i$.

Queda por combrobar el cumplimiento de la condición 2) del principio de las transformaciones de contracción:

$$\rho(A[Y], A[Z]) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \max\left|\int_{x_0}^{x} [f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) - f_i(x, z_1, z_2, \ldots, z_n)]\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \max\left|\int_{x_0}^{x} |f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) - f_i(x, z_1, z_2, \ldots, z_n)|\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant N\sum_{i=1}^{n} \max\left|\int_{x_0}^{x} \sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i|\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant N\sum_{i=1}^{n} \max|y_i - z_i| \sum_{i=1}^{n} \max\left|\int_{x_0}^{x} dx\right| = Nnh_0\rho(Y, Z).$$

Por lo tanto, si escogemos $h_0 \leqslant \frac{\alpha}{nN}$, donde $0 < \alpha < 1$, o bien $Nnh_0 \leqslant \alpha < 1$, la condición 2) del principio de las transformaciones de contracción se cumple, y existe un punto fijo $\overline{Y}$ único, el cual se puede hallar por el método de las aproximaciones sucesivas. Pero la condición $\overline{Y} = \overline{y}_2[\overline{Y}]$, por definición del operador A, es equivalente a las identidades

$$\overline{y}_i \equiv y_{i0} + \int_{x_0}^{x} f_i(x, \overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_n)\,dx \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

donde $\overline{y}_i\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ son las coordenadas de la función vectorial $\overline{Y}$, o sea que $\overline{Y}$ es la única solución del sistema (1.33).

E j e m p l o 1. Hallar algunas aproximaciones sucesivas y_1, y_2, y_3 de la solución de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2; \quad y(0) = 0, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \quad -1 \leqslant y \leqslant 1,$$

$$y = \int_0^x (x^2 + y^2)\,dx, \quad h_0 = \min\left(1, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Haciendo $y_0(x)=0$, obtenemos

$$y_1=\int_0^x x^2dx=\frac{x^3}{3}, \quad y_2=\int_0^x\left(x^2+\frac{x^6}{9}\right)dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63},$$

$$y_3=\int_0^x\left[x^2+\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63}\right)^2\right]dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63}\left(1+\frac{2x^4}{33}+\frac{x^8}{945}\right).$$

Ejemplo 2. ¿Bajo qué limitaciones la ecuación lineal

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x)$$

satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad?

Para el cumplimiento de la primera condición del teorema es suficiente que en el segmento considerado de variación de x, $a_1\leqslant x\leqslant a_2$, las funciones $p(x)$ y $f(x)$ sean continuas. En este caso se cumplirá también la segunda condición del teorema de existencia y unicidad, ya que la derivada parcial respecto a y del segundo miembro de la ecuación $\frac{dy}{dx}=-p(x)y+f(x)$ es igual a $-p(x)$ y, como consecuencia de la continuidad de la función $p(x)$ en el segmento $a_1\leqslant x\leqslant a_2$, está acotada en valor absoluto (véase la pág. 44). De este modo, si $p(x)$ y $f(x)$ son continuas en el segmento $a_1\leqslant x\leqslant a_2$, entonces por cada punto (x_0, y_0), donde $a_1<x_0<a_2$ e y_0 es arbitrario, pasa una curva integral única de la ecuación lineal considerada.

Teorema 1.2 (Sobre la dependencia continua de la solución con respecto al parámetro y a los valores iniciales). *Si el segundo miembro de la ecuación diferencial*

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y, \mu) \tag{1.34}$$

es continuo en μ para $\mu_0\leqslant\mu\leqslant\mu_1$ y satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad, y la constante de Lipschitz N no depende de μ, entonces la solución $y(x, \mu)$ de la ecuación considerada que satisface la condición $y(x_0)=y_0$, depende en forma continua de μ.

Construyamos las quebradas de Euler $y_n=y_n(x, \mu)$, que son funciones continuas en μ. Repitiendo los razonamientos de las págs. 45—47, obtenemos que la sucesión $y_n(x, \mu)$ converge uniformemente no sólo respecto a x, sino también respecto a μ para $x_0\leqslant x\leqslant x_0+H$, $\mu_0\leqslant\mu\leqslant\mu_1$, puesto que N y H no dependen de μ, si $H<\min\left(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{N}\right)$, donde $M\geqslant|f(x, y, \mu)|$. Por consiguiente, la solución $y=\bar{y}(x, \mu)$ de la ecuación

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x, y, \mu)\,dx, \tag{1.35}$$

que es el límite de la sucesión $y_n(x, \mu)$, es continua no sólo en x, sino también en μ.

Observación. Si se aplica a la ecuación (1.35) el método de las aproximaciones sucesivas, entonces las aproximaciones $y=y_n(x, \mu)$, que son funciones continuas en x y μ, convergen uniformemente a la solución $\bar{y}(x, \mu)$ de la ecuación (1.35) (puesto que $\alpha=Nh<1$ no depende de μ). Por lo tanto, también por este método se puede demostrar la dependencia continua de la solución con respecto a x y a μ.

Evidentemente, esta demostración no varía nada si el segundo miembro de la ecuación (1.34) es función continua de varios parámetros, suponiendo, claro está, que la constante de Lipschitz N no depende de éstos.

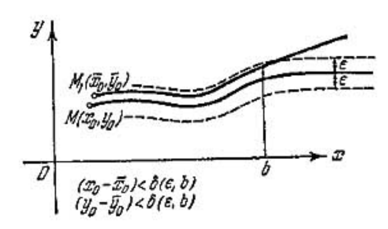


Fig. 1.18

Por este mismo método, en condiciones análogas, se podría demostrar la dependencia continua de la solución $y(x, x_0, y_0)$ de la ecuación $\frac{dy}{dx}=f(x, y)$ con respecto a las condiciones iniciales x_0 e y_0: en este caso sólo habría que disminuir un tanto h_0, ya que en caso contrario las soluciones, definidas por condiciones iniciales cercanas a x_0 e y_0, podrían salir de la región D ya para valores de x que se encuentren en el intervalo $x_0-h_0<x<$ $<x_0+h_0$.

Sin embargo, es más fácil reducir, por sustitución de variables, el problema de la dependencia de la solución de las condiciones iniciales al caso ya considerado más arriba de la dependencia de la solución de los parámetros contenidos en el segundo miembro de la ecuación (1.34). En efecto, haciendo $z=y(x, x_0, y_0)-y_0$, $t=x-x_0$, transformamos la ecuación $\frac{dy}{dx}=f(x, y)$ con condición inicial $y(x_0)=y_0$ en $\frac{dz}{dt}=f(t+x_0, z+y_0)$, $z(0)=0$. A esta ecuación ya se le puede aplicar el teorema de la dependencia continua de

la solución respecto a los parámetros x_0 e y_0, si la función f es continua y satisface la condición de Lipschitz.

Por medio de estos mismos métodos pueden ser demostrados teoremas análogos para los sistemas de ecuaciones.

Obsérvese que la dependencia continua de la solución $y(x, x_0, y_0)$, $x_0 \leqslant x \leqslant b$ (o bien $b \leqslant x \leqslant x_0$) de las condiciones iniciales x_0 e y_0 significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta(\varepsilon, b) > 0$ tal que de las desigualdades

$$|x_0 - \bar{x}_0| < \delta(\varepsilon, b) \quad \text{y} \quad |y_0 - \bar{y}_0| < \delta(\varepsilon, b)$$

se deduce la desigualdad

$$|y(x, x_0, y_0) - y(x, \bar{x}_0, \bar{y}_0)| < \varepsilon \tag{1.36}$$

para $x_0 \leqslant x \leqslant b$ (fig. 1.18).

Al aumentar b, disminuye, en general, $\delta(\varepsilon, b)$, y puede tender a cero cuando $b \to \infty$. Por eso, no siempre es posible escoger un número $\delta(\varepsilon) > 0$ para el cual se satisfaga la desigualdad (1.36) para todas las $x > x_0$; es decir que no siempre las soluciones cercanas en las condiciones iniciales permanecen cercanas para valores arbitrariamente grandes del argumento.

La solución que varía poco al variar las condiciones iniciales en forma arbitraria, pero suficientemente pequeña, para valores del argumento arbitrariamente grandes, se llama estable. Para más detalles sobre las soluciones estables, véase el cap. 4.

Teorema 1.3 (sobre la dependencia analítica de la solución con respecto al parámetro, teorema de Poincaré). *La solución $x(t, \mu)$ de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(t, x, \mu)$ que satisface la condición $x(t_0) = x_0$, depende analíticamente del parámetro μ en un entorno del valor $\mu = \mu_0$, si la función f en la región dada de variación de t y de x y en cierto entorno del punto μ_0, es continua en t y depende analíticamente de μ y de x.*

Una afirmación análoga tiene lugar también para el sistema de ecuaciones

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, \mu) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

En este caso se presupone que las funciones f_i son continuas en el primer argumento y dependen analíticamente de los argumentos restantes.

No daremos una demostración detallada de este teorema, así como de otros teoremas que exigen la aplicación de la teoría de las funciones analíticas. Recomendamos al lector el artículo de A. N. Tíjonov, que contiene la demostración más sencilla del teorema sobre la dependencia analítica de la solución con respecto al parámetro.

La idea de la demostración de A. N. Tíjonov se reduce a lo siguiente: considerando que μ puede tomar también valores complejos, se demuestra la existencia del límite $\lim\limits_{\Delta\mu \to 0} \frac{\Delta_\mu x(t, \mu)}{\Delta\mu} = \frac{\partial x}{\partial\mu}$, lo cual significa precisamente que la solución depende analíticamente de μ. La existencia de este límite se deduce del hecho que la razón $\frac{\Delta_\mu x}{\Delta\mu}$ satisface la ecuación diferencial lineal

$$\frac{d}{dt}\frac{\Delta_\mu x}{\Delta\mu} = \frac{f(t, x(t, \mu+\Delta\mu), \mu+\Delta\mu) - f(t, x(t, \mu), \mu+\Delta\mu)}{\Delta_\mu x(t, \mu)} \frac{\Delta_\mu x(t, \mu)}{\Delta\mu} + \\ + \frac{f(t, x(t, \mu), \mu+\Delta\mu) - f(t, x(t, \mu), \mu)}{\Delta\mu}, \quad \left.\frac{\Delta_\mu x}{\Delta\mu}\right|_{t=t_0} = 0,$$

cuya solución es única y, al tender el incremento $\Delta\mu$ de cualquier modo a cero, tiende a la solución única de la ecuación

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} z + \frac{\partial f}{\partial\mu}, \quad z(t_0) = 0.$$

Teorema 1.4 (sobre la derivabilidad de las soluciones). *Si en un entorno del punto (x_0, y_0) la función $f(x, y)$ tiene derivadas continuas hasta de k-ésimo orden inclusive, la solución $y(x)$ de la ecuación*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1.37}$$

que satisface la condición inicial $y(x_0) = y_0$ tendrá derivadas continuas hasta de $(k+1)$-ésimo orden inclusive en cierto entorno del punto (x_0, y_0).

Demostración. Sustituyendo $y(x)$ en la ecuación (1.37), obtenemos la identidad

$$\frac{dy}{dx} \equiv f(x, y(x)). \tag{1.37_1}$$

Por lo tanto, la solución $y(x)$ tiene la derivada continua $f(x, y(x))$ en un entorno del punto considerado. Entonces, debido a la existencia de derivadas continuas de la función f, existirá la derivada segunda continua de la solución

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f(x, y(x)).$$

Si $k > 1$, entonces, en virtud de la existencia de las derivadas continuas de segundo orden de la función f, se puede, derivando nuevamente la identidad (1.37_1), obtener la existencia y la continuidad de la tercera derivada de la solución

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} f + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} f_2 + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f\right).$$

Repitiendo este procedimiendo k veces, se demuestra el teorema.

Consideremos ahora los puntos (x_0, y_0) en cierto entorno de los cuales no existe la solución de la ecuación $\frac{dy}{dx}=f(x, y)$ que satisface la condición $y(x_0)=y_0$ o existe pero no es única. Estos puntos se llaman *puntos singulares*.

La curva formada enteramente por puntos singulares se llama *singular*. Si la gráfica de cierta solución está formada enteramente por puntos singulares, dicha *solución* se llama *singular*.

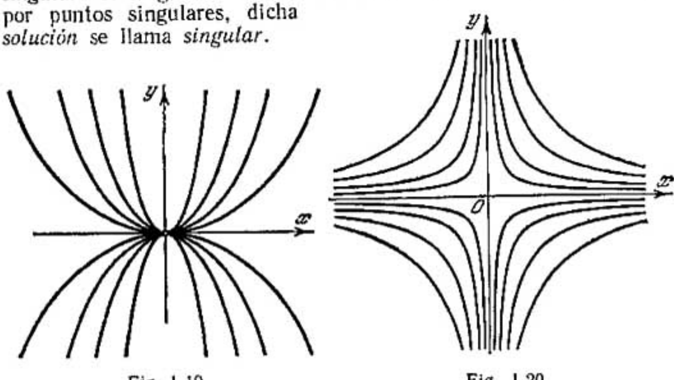


Fig. 1.19 Fig. 1.20

Para hallar los puntos singulares o las curvas singulares, hay que encontrar ante todo el conjunto de puntos en los cuales no se cumplen las condiciones del teorema de existencia y unicidad de la solución, puesto que sólo entre dichos puntos pueden haber singulares. Naturalmente, no cada punto en el cual no se cumplen las condiciones de dicho teorema es necesariamente singular, ya que las condiciones del mismo son suficientes para la existencia y unicidad de la solución, pero no necesarias.

La primera condición del teorema indicado (véase la pág. 43) no se cumple en los puntos de discontinuidad de la función $f(x, y)$. Además, si al acercarse por cualquier camino a cierto punto aislado de discontinuidad (x_0, y_0), el módulo de la función $f(x, y)$ crece indefinidamente, entonces en los problemas en que las variables x e y son equivalentes, la ecuación $\frac{dy}{dx}=f(x, y)$, como hemos convenido más arriba, debe ser sustituida por $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(x, y)}$, cuyo segundo miembro ya es continuo en el punto (x_0, y_0) si consideramos que $\frac{1}{f(x_0, y_0)}=0$.

Por consiguiente, en los problemas en que las variables x e y son equivalentes, la primera condición del teorema de existencia y unicidad no se cumple en los puntos en que las funciones $f(x, y)$ y $\frac{1}{f(x, y)}$ son discontinuas.

Con particular frecuencia nos encontramos con ecuaciones de la forma

$$\frac{dy}{dx}=\frac{M(x, y)}{N(x, y)}, \tag{1.38}$$

donde las funciones $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son continuas. En este caso, las funciones $\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$ y $\frac{N(x, y)}{M(x, y)}$ serán simultáneamente discontinuas sólo en los puntos (x_0, y_0) en los cuales $M(x_0, y_0)=$ $=N(x_0, y_0)=0$ y no existan los límites

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

y

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{N(x, y)}{M(x, y)}.$$

Veamos algunos puntos singulares típicos de la ecuación (1.38).

Ejemplo 3.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x}.$$

El segundo miembro de la ecuación dada, y el de la ecuación $\frac{dx}{dy}=\frac{x}{2y}$ son discontinuos en el punto $x=0$, $y=0$. Integrando, obtenemos $y=cx^2$, que es una familia de parábolas (fig. 1.19), y $x=0$. En el origen de coordenadas tenemos un punto singular, llamado *nudo*.

Ejemplo 4.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}.$$

El segundo miembro de la ecuación dada, y el de la ecuación $\frac{dx}{dy}=-\frac{x}{y}$ son discontinuos en el punto $x=0$, $y=0$. Integrando, obtenemos $y=\frac{c}{x}$, que es una familia de hipérbolas (fig. 1.20), y la recta $x=0$. En el origen de coordenadas se tiene un punto singular, llamado *montura*.

Ejemplo 5.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}.$$

El segundo miembro de esta ecuación, y el de la ecuación $\frac{dx}{dy}=\frac{x-y}{x+y}$ son discontinuos en el punto $x=0$, $y=0$. Integrando la ecuación homogénea

considerada (compárese con el ejemplo 3 de la pág. 39), obtenemos

$$\sqrt{x^2+y^2}=ce^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}},$$

o, en coordenadas polares, $\rho=ce^{\varphi}$, que son espirales logarítmicas (fig. 1.21). Un punto singular de este tipo se llama *foco*.

Ejemplo 6.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}.$$

El segundo miembro de esta ecuación y el de la ecuación $\frac{dx}{dy}=-\frac{y}{x}$ son discontinuos en el punto $x=0$, $y=0$. Integrando, obtenemos $x^2+y^2=c^2$, que

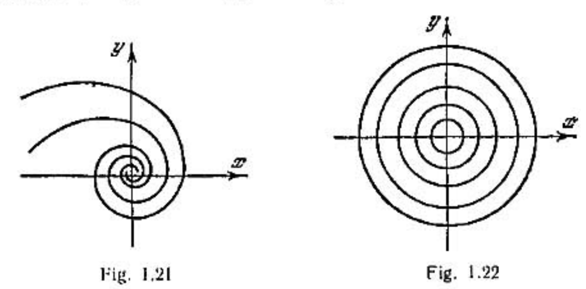


Fig. 1.21 Fig. 1.22

es una familia de circunferencias con centro en el origen de coordenadas (fig. 1.22). Este tipo de punto singular, o sea, un punto singular cuyo entorno está cubierto por una familia de curvas integrales cerradas, se llama *centro*. En este ejemplo no existe ninguna solución que satisfaga la condición $y(0)=0$.

El problema de los puntos singulares y de su clasificación será enfocado desde un punto de vista un tanto diferente en el capítulo 4.

La segunda condición del teorema 1.1 de existencia y unicidad de la solución: la condición de Lipschitz, o la condición más grosera de la existencia de la derivada parcial acotada $\frac{\partial f}{\partial y}$, con mayor frecuencia no se cumple en los puntos en que $\frac{\partial f}{\partial y}$ crece indefinidamente al aproximarse a ellos, o sea, en los puntos donde $\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}}=0$.

La ecuación $\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}}=0$, en general, define cierta curva, en cuyos puntos puede no tener lugar la unicidad. Si en los puntos de esta

curva la unicidad se viola, entonces la curva será singular. Si, además, esta curva es integral, obtendremos una curva integral singular.

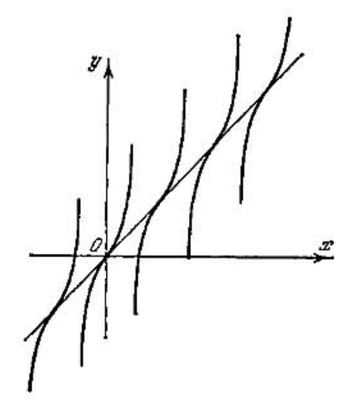


Fig. 1.23

Es posible que la curva $\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}}=0$ tenga varias ramas; entonces para cada una de ellas hay que resolver el problema de si esta rama es una curva singular, o bien una curva integral, o no.

Ejemplo 7. ¿Tiene solución singular la ecuación $\frac{dy}{dx}=y^2+x^2$?

Las condiciones del teorema de existencia y unicidad se cumplen en un entorno de cualquier punto: por lo tanto, no hay solución singular.

Ejemplo 8. ¿Tiene solución singular la ecuación $\frac{dy}{dx}=\sqrt[3]{(y-x)^2}+5$?

El segundo miembro es continuo, pero la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2}{3}(y-x)^{-\frac{1}{3}}$ crece indefinidamente al aproximarse a la recta $y=x$: por lo tanto, en dicha recta puede no cumplirse la unicidad. Sin embargo, la función $y=x$ no satisface la ecuación considerada y, por consiguiente, no hay solución singular.

Ejemplo 9. ¿Tiene solución singular la ecuación $\frac{dy}{dx}=\sqrt[3]{(y-x)^2}+1$?

Al igual que en el ejemplo anterior, la ecuación $\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}}=0$ tiene la forma $y=x$, pero esta vez la función $y=x$ satisface la ecuación dada. Queda por

aclarar si se viola o no la unicidad en los puntos de esta recta. Mediante la sustitución de variables $z=y-x$, se reduce la ecuación inicial a una ecuación de variables separables, luego de lo cual hallamos sin dificultad la solución: $y-x=\frac{(x-c)^3}{27}$. Las curvas de esta familia pasan por los puntos de la gráfica de la solución $y=x$ (fig. 1.23). Por consiguiente, en cada punto de la recta $y=x$ la unicidad se viola, y la función $y=x$ es una solución singular.

Este ejemplo demuestra que la sola continuidad del segundo miembro de la ecuación

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y), \quad y(x_0)=y_0,$$

no es suficiente para la unicidad de la solución del problema inicial fundamental; sin embargo, se puede demostrar que la existencia de la solución con ello ya está garantizada.

§ 7. METODOS APROXIMADOS DE INTEGRACION DE LAS ECUACIONES DE PRIMER ORDEN

En el parágrafo anterior ya hemos visto dos métodos aproximados de integración de ecuaciones diferenciales: el método de Euler y el método de las aproximaciones sucesivas. Sin embargo, ambos métodos tienen insuficiencias sustanciales, por lo que son relativamente poco utilizados en la práctica del cálculo aproximado.

Las virtudes de los métodos aproximados se valoran por la exactitud de los resultados que éstos dan y por la simplicidad de los cálculos. Las insuficiencias del método de las aproximaciones sucesivas son la relativamente lenta convergencia a la solución de las aproximaciones y la complejidad de los cálculos. La insuficiencia del método de Euler es la poca exactitud, para elevar la cual hay que tomar un paso h muy pequeño. Esto conduce a cálculos muy largos.

A propósito, un pequeño perfeccionamiento del *método de Euler*, el llamado *emparejamiento* (o iteración), conduce ya a un esquema de cálculo bastante cómodo. Al aplicar el método de Euler con emparejamiento, se divide el segmento $x_0 \leqslant x \leqslant b$, en el que hay que calcular la solución de la ecuación $\frac{dy}{dx}=f(x, y)$ determinada por la condición $y(x_0)=y_0$, en partes iguales de longitud $h=\frac{b-x_0}{n}$. Denotando $x_0+kh=x_k$, $y(x_0+kh)=y_k$, $y'(x_0+kh)=y'_k$, se calcula y_{k+1}, si y_k ya fue hallado, al principio por la fórmula de Euler:

$$y_{k+1}=y_k+hy'_k, \text{ o bien } \Delta y_k=y_{k+1}-y_k=hy'_k, \tag{1.39}$$

es decir, en el segmento $x_0+kh \leqslant x \leqslant x_0+(k+1)h$ se sustituye la curva integral que pasa por el punto (x_k, y_k) por un segmento

de su tangente en ese mismo punto (véase la fig. 1.13, pág. 42). Después se precisa el valor calculado y_{k+1}, para lo cual se determina la derivada $y'_{k+1}=f(x_{k+1}, y_{k+1})$ y se aplica nuevamente la fórmula de Euler (1.39), pero tomando en lugar de y'_k la media aritmética de los valores calculados de las derivadas en los puntos frontera $\frac{y'_k+y'_{k+1}}{2}$, es decir, se considera

$$\bar{y}_{k+1}=y_k+h\frac{y'_k+y'_{k+1}}{2}. \tag{1.40}$$

El valor nuevamente calculado $\bar{y}_{k+1}$ nos permite calcular un nuevo valor de la derivada: $\bar{y}'_{k+1}=f(x_{k+1}, \bar{y}_{k+1})$, después de lo cual se vuelve a calcular la media aritmética de las derivadas $\frac{y'_k+\bar{y}'_{k+1}}{2}$, y se aplica de nuevo la fórmula (1.40)

$$\bar{\bar{y}}_{k+1}=y_k+h\frac{y'_k+\bar{y}'_{k+1}}{2}.$$

Este proceso se continúa hasta que coincidan, en los límites de la exactitud dada, los resultados de dos cálculos sucesivos de los valores de y_{k+1}. Luego, por el mismo método, se calcula y_{k+2} etc.

El método de Euler con emparejamiento da en cada paso un error de orden h^3 y con frecuencia se aplica en la práctica del cálculo. Sin embargo, con mucho mayor frecuencia se utilizan métodos más exactos (como los de Störmer, Runge, Milne y otros), basados en la sustitución de la solución buscada por varios miembros de su desarrollo de Taylor

$$y_{k+1}\approx y_k+hy'_k+\frac{h^2}{2!}y''_k+\ldots+\frac{h^n}{n!}y_k^{(n)}, \tag{1.41}$$

es decir, en la sustitución de la curva integral buscada por una parábola de n-ésimo grado, que tenga un contacto de orden n con la curva integral en el punto $x=x_k$, $y=y_k$.

La aplicación directa de la fórmula de Taylor (1.41) en cada paso conduce a cálculos complejos y no de un mismo tipo, por lo que ésta se aplica comúnmente sólo para calcular algunos valores cercanos a $x=x_0$, necesarios para la aplicación de esquemas de cálculo más cómodos. Entre éstos se debe mencionar ante todo el *método de Störmer*, en el cual el cálculo se realiza mediante una de las siguientes fórmulas, según el grado de la parábola de aproximación:

$$y_{k+1}=y_k+q_k+\frac{1}{2}\Delta q_{k-1}, \tag{1.42}$$

$$y_{k+1}=y_k+q_k+\frac{1}{2}\Delta q_{k-1}+\frac{5}{12}\Delta^2 q_{k-2}, \tag{1.43}$$

$$y_{k+1}=y_k+q_k+\frac{1}{2}\Delta q_{k-1}+\frac{5}{12}\Delta^2 q_{k-2}+\frac{3}{8}\Delta^3 q_{k-3}, \qquad (1.44)$$

$$y_{k+1}=y_k+q_k+\frac{1}{2}\Delta q_{k-1}+\frac{5}{12}\Delta^2 q_{k-2}+\frac{3}{8}\Delta^3 q_{k-3}+\frac{251}{720}\Delta^4 q_{k-4}, \qquad (1.45)$$

. . . .

donde

$$q_k=y'_k h,\ \Delta q_{k-1}=q_k-q_{k-1},\ \Delta^2 q_{k-2}=\Delta q_{k-1}-\Delta q_{k-2}$$
$$\Delta^3 q_{k-3}=\Delta^2 q_{k-2}-\Delta^2 q_{k-3},\ \Delta^4 q_{k-4}=\Delta^3 q_{k-3}-\Delta^3 q_{k-4},$$

. . . .

Las fórmulas de Störmer pueden ser obtenidas mediante la integración, desde x_k hasta x_{k+1}, de la indentidad $y'\equiv f(x, y(x))$, en la cual $y(x)$ es la solución buscada:

$$y_{k+1}\equiv y_k+\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x))\,dx,$$

y aplicando la fórmula de cuadratura, conocida del curso de análisis:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}}\varphi(x)\,dx\approx h\left[\varphi_k+\frac{1}{2}\Delta\varphi_{k-1}+\frac{5}{12}\Delta^2\varphi_{k-2}+\right.$$
$$\left.+\frac{3}{8}\Delta^3\varphi_{k-3}+\frac{251}{270}\Delta^4\varphi_{k-4}+\ldots\right]. \qquad (1.46)$$

Recordemos que esta fórmula de cuadratura se obtiene mediante la sustitución de la función subintegral $\varphi(x)$ por un polinomio de aproximación según la fórmula de interpolación de Newton y el cálculo de las integrales de cada sumando.

La apreciación del resto de la fórmula de cuadratura (1.46) muestra que el error en la fórmula (1.42) en un paso es de orden h^3; en la fórmula (1.43), de orden h^4; en la (1.44), de orden h^5; en la (1.45), de orden h^6. Si se toma en cuenta que para varios pasos los errores se pueden sumar, entonces para la apreciación del error en n pasos hay que multiplicar las apreciaciones obtenidas para un paso por $n=\frac{b-x_0}{h}$, lo cual puede conducir a la variación del orden del error mencionado más arriba.

Observación. Se puede demostrar, por desarrollo directo según la fórmula de Taylor en un entorno del punto $x=x_k$, que el segundo miembro de la fórmula de Störmer (1.42) coincide con los tres primeros términos del desarrollo de y_{k+1} según la fórmula de Taylor (1.41), con exactitud de hasta los términos que contienen a h en potencias mayores que 2:

$$y_k+hy'_k+\frac{h^2}{2!}y''_k; \qquad (1.47)$$

el segundo miembro de la fórmula siguiente de Störmer (1.43), con exactitud de hasta los términos que contienen a h en potencias mayores que 3, coincide con

$$y_k + hy'_k + \frac{h^2}{2!} y''_k + \frac{h^3}{3!} y'''_k.$$

etc. Para la fórmula (1.42), por ejemplo, obtenemos:

$$y_k + hy'_k + \frac{1}{2} h\Delta y'_{k-1} = y_k + hy'_k + \frac{1}{2} h (y'_k - y'_{k-1}), \qquad (1.48)$$

o, desarrollando

$$y'_{k-1} = y'(x_{k-1})$$

por la fórmula de Taylor

$$y'(x_{k-1}) = y'(x_k) - hy''(x_k) + \frac{1}{2} h^2 y'''(x_k) + \ldots$$

y sustituyendo en (1.48), obtenemos:

$$y_k + hy'_k + \frac{1}{2} h (y'_k - y'_{k-1}) = y_k + hy'_k + \frac{1}{2} h^2 y''_k - \frac{1}{4} h^3 y'''_k + \ldots$$

por lo tanto, los tres primeros términos coinciden con los tres términos del desarrollo según la fórmula de Taylor (1. 47).

Para comenzar el cálculo por las fórmulas de Störmer es necesario conocer los valores de la función buscada no en uno, sino en varios puntos (al aplicar la fórmula (1.42), en dos puntos: x_0 y $x_0 + h$; al aplicar (1.43), en tres: x_0, $x_0 + h$ y $x_0 + 2h$, etc.). Estos primeros valores pueden ser calculados por el método de Euler con paso disminuido, o aplicando la fórmula de Taylor (1.41), o por el *método de Runge* expuesto brevemente más abajo.

Tomemos, por ejemplo, la fórmula (1.44):

$$y_{k+1} = y_k + q_k + \frac{1}{2} \Delta q_{k-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 q_{k-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 q_{k-3},$$

y supongamos que, aparte del valor inicial dado y_0, ya hemos hallado y_1, y_2 e y_3. Entonces se pueden calcular:

$$q_0 = f(x_0, y_0) h, \quad q_1 = f(x_1, y_1) h,$$
$$q_2 = f(x_2, y_2) h, \quad q_3 = f(x_3, y_3) h,$$

y, por lo tanto, también

$$\Delta q_0 = q_1 - q_0, \quad \Delta q_1 = q_2 - q_1, \quad \Delta q_2 = q_3 - q_2,$$
$$\Delta^2 q_0 = \Delta q_1 - \Delta q_0, \; \Delta^2 q_1 = \Delta q_2 - \Delta q_1, \; \Delta^3 q_0 = \Delta^2 q_1 - \Delta^2 q_0.$$

Ahora, mediante la fórmula (1.44), calculamos el valor y_4 y, conociendo éste, obtenemos q_4, Δq_3, $\Delta^2 q_2$ y $\Delta^3 q_1$. Luego, por medio de la misma fórmula (1.44), calculamos y_5, etc.

Los resultados del cálculo se anotan en la tabla siguiente, que se va llenando gradualmente:

x	y	q	Δq	$\Delta^2 q$	$\Delta^3 q$
x_0	y_0	q_0	Δq_0	$\Delta^2 q_0$	$\Delta^3 q_0$
x_1	y_1	q_1	Δq_1	$\Delta^2 q_1$	
x_2	y_2	q_2	Δq_2		
x_3	y_3	q_3			
x_4					
x_5					
x_6					

Generalmente se exige calcular con una exactitud dada el valor de la solución buscada de la ecuación diferencial en cierto punto $x=b$. Entonces surge de inmediato la pregunta: ¿cuál de las fórmulas de Störmer convendría utilizar y qué paso h garantiza la exactitud de cálculo exigida, sin ser demasiado pequeño para que no conduzca a un exceso de operaciones? Los órdenes de los errores para cada paso, indicados más arriba, dan cierta idea sobre la elección de la fórmula con la que conviene realizar los cálculos, y sobre la elección del paso. Hay que tener en cuenta, claro está, que tras unos cuantos pasos los errores pueden sumarse. Si el paso h fue escogido correctamente, todas las diferencias en la tabla deben variar uniformemente, y las últimas diferencias en la fórmula (1.44) deben influir sólo en las cifras de reserva. Un cambio brusco de cierta diferencia demuestra que para el paso h escogido pueden no considerarse algunas peculiaridades de la variación de la función en el segmento considerado, lo cual puede traer aparejado errores considerables en el cálculo de y_{k+1}.

Sin embargo, todos estos razonamientos no son del todo seguros, y valorizaciones más exactas del error son muy complejas e incómodas. Por eso a menudo se aplica el siguiente método práctico

y bastante efectivo: se escoge un paso h, en base a los razonamientos inexactos expuestos más arriba; se realiza el cálculo mediante una de las fórmulas de Störmer, con pasos h y $\frac{h}{2}$, y se comparan los resultados en los puntos comunes. Si dichos resultados coinciden en los límites de la exactitud dada, entonces se considera que el paso h asegura la exactitud de cálculo dada. Si, en cambio, los resultados no coinciden en los límites de la exactitud dada, entonces se disminuye el paso a la mitad, se realizan los cálculos con los pasos $\frac{h}{2}$ y $\frac{h}{4}$, y se comparan nuevamente los resultados, etc.

Es conveniente realizar en forma paralela los cálculos con pasos h y $\frac{h}{2}$, para notar lo antes posible la no coincidencia de los resultados, y no efectuar un trabajo innecesario. Este método de doble computación tiene además la cualidad de que al aplicarlo se excluyen casi por completo los errores en los cálculos, puesto que éstos, por regla general, son descubiertos al comparar los resultados de los cálculos con pasos h y $\frac{h}{2}$.

Para hallar varios valores iniciales y_i, necesarios para el comienzo de los cálculos por el método de Störmer, se puede recomendar, aparte de los métodos señalados más arriba (método de Euler con paso disminuido, con iteraciones o sin ellas, o método de desarrollo según la fórmula de Taylor), el método de Runge.

Según este método, para hallar y_{k+1} hay que calcular cuatro números:

$$\begin{gathered} m_1=f(x_k,\ y_k),\ \ m_2=f\left(x_k+\frac{h}{2},\ y_k+\frac{m_1h}{2}\right), \\ m_3=f\left(x_k+\frac{h}{2},\ y_k+\frac{m_2h}{2}\right),\ \ m_4=f(x_k+h,\ y_k+m_3h), \end{gathered} \tag{1.49}$$

y entonces

$$y_{k+1}=y_k+\frac{h}{6}(m_1+2m_2+2m_3+m_4). \tag{1.50}$$

El método de Runge se aplica generalmente sólo para el cálculo de varios valores iniciales $y_1,\ y_2,\ \ldots$, necesarios para comenzar los cálculos por el método de Störmer; sin embargo, por este método se pueden calcular también los demás valores. El método de Runge, al igual que el de Störmer, se fundamenta en la aproximación de la curva integral buscada por una parábola osculatriz.

Si se compara el segundo miembro de la fórmula de Runge (1.50) con el desarrollo por la fórmula de Taylor

$$y_{k+1}=y_k+y_k'h+\frac{1}{2!}y_k''h^2+\frac{1}{3!}y_k'''h^3+\frac{1}{4!}y_k^{\mathrm{IV}}h^4+\ldots,$$

resulta que los términos con potencias menores de cinco coinciden. Por eso, al calcular varios valores iniciales por el método de Runge, con paso ulterior al cálculo por medio del método de Störmer según las fórmulas (1.42), (1.43) o (1.44), se puede realizar el cálculo con el mismo paso h. Si, en cambio, a continuación se aplica la fórmula de Störmer (1.45), entonces el comienzo del cálculo por el método de Runge debe efectuarse con paso disminuido, puesto que para un mismo paso la fórmula (1.50) no garantiza la misma exactitud de los cálculos que la (1.45). A propósito, con frecuencia aún al aplicar la fórmula de Störmer (1.43) y la (1.44), el comienzo de los cálculos se realiza de todos modos mediante la fórmula de Runge con paso disminuido, ya que incluso un pequeño error en el cálculo de los valores iniciales para la fórmula de Störmer puede disminuir bruscamente la exactitud de los cálculos ulteriores *).

Las máquinas calculadoras modernas de acción discreta permiten realizar los cálculos indicados arriba por los métodos de Störmer o de Runge con excepcional rapidez (varias decenas y hasta centenas de miles de operaciones por segundo). Además, el propio proceso de programación puede ser considerablemente simplificado por medio de la aplicación de programas standard, preparados para los métodos de Störmer y de Runge. En este caso, para la integración aproximada de la ecuación diferencial $y'=f(x, y)$, $y(x_0)=y_0$, hay que confeccionar sólo el subprograma para el cálculo de los valores $y'_k=f(x_k, y_k)$, e incluirlo en el programa standard.

Ejemplo.

$$y'=x^2+y^2; \quad y(0)=-1.$$

Hallar el valor $y(0,5)$ con aproximación de 0,01.

Aplicando el desarrollo según la fórmula de Taylor

$$y(x)=y(0)+y'(0)\,x+\frac{y''(0)\,x^2}{2!}+\frac{y'''(0)\,x^3}{3!}+\ldots,$$

se calcula el valor de $y(x)$ en los puntos $x_1=0,1$ y $x_2=0,2$:

$$y(0,1)=-0,9088 \quad \text{e} \quad y(0,2)=-0,8309$$

(o bien, en lugar de $y(0,2)$, se calcula $y(-0,1)$, lo cual es aún más preferible, ya que el punto $x_1=-0,1$ se encuentra más cerca del punto inicial $x_0=0$ que el punto $x_2=0,2$). Los valores subsiguientes se calculan por medio de la fórmula de Störmer (1.43) con paso $h=0,1$, y los resultados del cálculo se disponen en una tabla (sin las diferencias $\Delta^3 q$). Después de esto, o en forma paralela, se realiza el cálculo con paso $\frac{h}{2}=0,05$. Como resultado, se obtiene:

$$y(0,5)\approx -0,63.$$

---

*) Para una exposición más detallada de los métodos aproximados de integración de las ecuaciones diferenciales, consúltese los libros de A. N. Krilov, de I. S. Berezin y N. P. Zhidkov (véase la bibliografía recomendada).

§ 8. TIPOS SIMPLES DE ECUACIONES NO RESUELTAS CON RESPECTO A LA DERIVADA

La ecuación diferencial de primer orden no resuelta con respecto a la derivada, tiene la forma

$$F(x, y, y') = 0. \qquad (1.51)$$

Si esta ecuación puede ser resuelta con respecto a y', se obtienen una o varias ecuaciones

$$y' = f_i(x, y) \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Integrando estas ecuaciones, ya resueltas con respecto a la derivada, se hallan las soluciones de la ecuación inicial (1.51).

Integremos, por ejemplo, la ecuación

$$(y')^2 - (x+y)\,y' + xy = 0. \qquad (1.52)$$

Resolviendo esta ecuación, que es cuadrática con respecto a y', tendremos: $y' = x$ e $y' = y$. Integrando cada ecuación obtenida, hallamos:

$$y = \frac{x^2}{2} + c \qquad (1.53)$$

e

$$y = ce^x. \qquad (1.54)$$

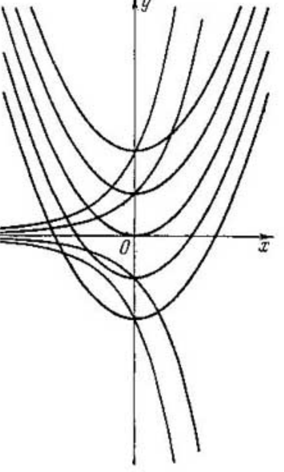


Fig. 1.24

(fig. 1.24). Ambas familias de soluciones satisfacen la ecuación inicial.

Las curvas formadas por un arco de curva integral de la familia (1.53) y un arco de curva integral de la familia (1.54), si en el punto común poseen una tangente común, serán también curvas integrales lisas de la ecuación (1.52). En la fig. 1.25 está representada curva integral de la ecuación (1.52), formada por las gráficas de las soluciones $y = \frac{x^2}{2} + c$ para $c = \frac{1}{2}$, $-\infty < x \leqslant 1$, e $y = ce^x$, para $c = e^{-1}$, $1 \leqslant x < \infty$; en la fig. 126 se muestra la curva integral de la ecuación (1.52), formada por las gráficas de las soluciones $y = \frac{x^2}{2}$, si $x \leqslant 0$, e $y \equiv 0$ si $x > 0$.

De esta manera, la ecuación

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (1.51)$$

puede ser integrada resolviendo con respecto a y' e integrando las ecuaciones obtenidas $y' = f_i(x, y)$ $(i = 1, 2, \ldots)$, ya resueltas con respecto a la derivada.

Sin embargo, raramente la ecuación (1.51) se resuelve de modo sencillo con respecto a y', y con menor frecuencia aún las ecuaciones $y' = f_i(x, y)$, obtenidas después de la resolución con respecto a y' se llegan a integrar fácilmente. Por eso, a menudo hay que integrar ecuaciones del tipo (1.51) por otros métodos. Consideremos los siguientes casos.

1) La ecuación (1.51) tiene la forma

$$F(y') = 0, \tag{1.55}$$

y además existe por lo menos una raíz real $y' = k_i$ de esta ecuación.

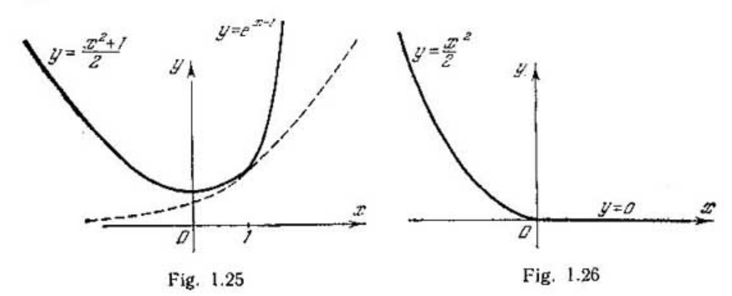


Fig. 1.25 Fig. 1.26

Como la ecuación (1.55) no contiene a x ni a y, k_i es constante. Por lo tanto, integrando la ecuación $y' = k_i$, obtenemos $y = k_i x + c$, o bien $k_i = \frac{y-c}{x}$. Pero k_i es raíz de la ecuación (1.55); por lo tanto, $F\left(\frac{y-c}{x}\right) = 0$ es integral de la ecuación considerada.

Ejemplo 1.

$$(y')^7 - (y')^5 + y' + 3 = 0.$$

La integral de la ecuación es

$$\left(\frac{y-c}{x}\right)^7 - \left(\frac{y-c}{x}\right)^5 + \frac{y-c}{x} + 3 = 0.$$

2) La ecuación (1.51) tiene la forma

$$F(x, y') = 0. \tag{1.56}$$

Si esta ecuación es difícil de resolver con respecto a y', entonces es conveniente introducir un parámetro t y sustituir la ecuación (1.56) por dos ecuaciones: $x = \varphi(t)$ e $y' = \psi(t)$. Ya que $dy = y'dx$, en este caso $dy = \psi(t)\varphi'(t)\,dt$, de donde $y = \int \psi(t)\varphi'(t)\,dt + c$ y,

por consiguiente, las curvas integrales de la ecuación (1.56) se determinan en forma paramétrica mediante las siguientes ecuaciones:

$$x=\varphi(t),$$
$$y=\int \psi(t)\varphi'(t)\,dt+c.$$

Si la ecuación (1.56) es fácilmente resoluble con respecto a x, $x=\varphi(y')$, casi siempre resulta cómodo introducir $y'=t$ en calidad de parámetro. Entonces

$$x=\varphi(t),\ dy=y'dx=t\varphi'(t)\,dt,\ y=\int t\varphi'(t)\,dt+c.$$

Ejemplo 2.

$$x=(y')^3-y'-1.$$

Haciendo $y'=t$, resulta

$$x=t^3-t-1, \tag{1.57}$$
$$dy=y'dx=t(3t^2-1)\,dt,$$
$$y=\frac{3t^4}{4}-\frac{t^2}{2}+c_1. \tag{1.58}$$

Las ecuaciones (1.57) y (1.58) determinan en forma paramétrica la familia de curvas integrales buscadas.

Ejemplo 3.

$$x\sqrt{1+y'^2}=y'.$$

Hacemos $y'=\operatorname{tg} t$, $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$; entonces

$$x=\operatorname{sen} t, \tag{1.59}$$
$$dy=y'\,dx=\operatorname{tg} t\cdot\cos t\,dt=\operatorname{sen} t\,dt,$$
$$y=-\cos t+c_1 \tag{1.60}$$

o, eliminando t de las ecuaciones (1.59) y (1.60), se obtiene $x^2+(y-c_1)^2=1$, que es una familia de circunferencias.

3) La ecuación (1.51) tiene la forma

$$F(y,\ y')=0. \tag{1.61}$$

Si es difícil resolver esta ecuación con respecto a y', entonces, como en el caso anterior, es conveniente introducir un parámetro t y sustituir (1.61) por dos ecuaciones, $y=\varphi(t)$ e $y'=\psi(t)$. Puesto que $dy=y'dx$, entonces $dx=\frac{dy}{y'}=\frac{\varphi'(t)\,dt}{\psi(t)}$, de donde $x=\int\frac{\varphi'(t)\,dt}{\psi(t)}+c$. Por lo tanto, las curvas integrales buscadas se determinan en forma paramétrica por las ecuaciones

$$x=\int\frac{\varphi'(t)\,dt}{\psi(t)}+c \text{ e } y=\varphi(t).$$

En particular, si la ecuación (1.61) se resuelve fácilmente con respecto a y, comúnmente resulta cómodo tomar a y' en calidad de parámetro.

Efectivamente, si $y=\varphi(y')$, haciendo $y'=t$, obtenemos $y=\varphi(t)$, $dx=\frac{dy}{y'}=\frac{\varphi'(t)\,dt}{t}$,

$$x=\int\frac{\varphi'(t)\,dt}{t}+c.$$

Ejemplo 4.

$$y=(y')^5+(y')^3+y'+5.$$

Haciendo $y'=t$, resulta

$$y=t^5+t^3+t+5, \qquad (1.62)$$

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{(5t^4+3t^2+1)\,dt}{t}=\left(5t^3+3t+\frac{1}{t}\right)dt,$$

$$x=\frac{5t^4}{4}+\frac{3t^2}{2}+\ln|t|+c. \qquad (1.63)$$

Las ecuaciones (1.62) y (1.63) son ecuaciones paramétricas de la familia de curvas integrales.

Ejemplo 5.

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}}=1.$$

Haciendo $y'=\operatorname{sh} t$, resulta

$$y=\operatorname{ch} t, \qquad (1.64)$$

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{\operatorname{sh} t\,dt}{\operatorname{sh} t}=dt,$$

$$x=t+c, \qquad (1.65)$$

o bien, eliminando el parámetro t de (1.64) y de (1.65), obtenemos $y=\operatorname{ch}(x-c)$.

Consideremos ahora el caso general: el primer miembro de la ecuación

$$F(x,\ y,\ y')=0 \qquad (1.51)$$

depende de los tres argumentos x, y e y'. Sustituyamos la ecuación (1.51) por su representación paramétrica:

$$x=\varphi(u,\ v),\ y=\psi(u,\ v),\ y'=\chi(u,\ v).$$

Utilizando la dependencia $dy=y'\,dx$, tendremos

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}du+\frac{\partial\psi}{\partial v}dv=\chi(u,\ v)\left[\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,du+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\,dv\right],$$

de donde, resolviendo con respecto a la derivada $\frac{dv}{du}$, se obtiene

$$\frac{dv}{du}=\frac{\chi(u,v)\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\frac{\partial\psi}{\partial u}}{\frac{\partial\psi}{\partial v}-\chi(u,v)\frac{\partial\varphi}{\partial v}}. \qquad (1.66)$$

Como resultado, obtuvimos una ecuación de primer grado, ya *resuelta con respecto a la derivada*, con lo que el problema se reduce

al considerado en los parágrafos anteriores; sin embargo, claro está, la ecuación obtenida (1.66) rara vez se integra en cuadraturas.

Si la ecuación

$$F(x, y, y')=0$$

se resuelve fácilmente con respecto a y, frecuentemente es cómodo tomar a x y a y' en calidad de parámetros u y v. Efectivamente, si la ecuación (1.51) se reduce a la forma

$$y=f(x, y') \tag{1.67}$$

entonces, considerando a x y a $y'=p$ como parámetros, se obtiene

$$y=f(x, p), \; dy=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial p}dp$$

o bien

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx},$$

$$p=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}. \tag{1.68}$$

Integrando la ecuación (1.68) (la cual, claro está, no siempre se integra en cuadraturas), obtenemos $\Phi(x, p, c)=0$. El conjunto de ecuaciones $\Phi(x, p, c)=0$ e $y=f(x, p)$, donde p es un parámetro, determina la familia de curvas integrales.

Obsérvese que la ecuación (1.68) puede ser obtenida derivando la ecuación (1.67) con respecto a x. En efecto, derivando (1.67) respecto a x y haciendo $y'=p$, obtenemos $p=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}$, lo cual coincide con (1.68). Por ello, este método es llamado frecuentemente integración de ecuaciones diferenciales por derivación.

De manera completamente análoga a menudo se integra la ecuación

$$F(x, y, y')=0,$$

si ésta es fácilmente resoluble con respecto a x:

$$x=f(y, y'). \tag{1.69}$$

En este caso, tomando como parámetros a y y a $y'=p$, y utilizando la dependencia $dy=y'dx$, se obtiene

$$dy=p\left[\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial p}dp\right],$$

o bien

$$\frac{1}{p}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}. \tag{1.70}$$

Integrando la ecuación (1.70), obtenemos $\Phi(y, p, c)=0$. Esta ecuación, junto con $x=f(y, p)$, determina las curvas integrales

de la ecuación inicial. La ecuación (1.70) puede obtenerse de (1.69) derivando con respecto a y.

Como ejemplo de la aplicación de este método, consideremos la ecuación lineal respecto a x y a y

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'),$$

llamada *ecuación de Lagrange*. Derivando con respecto a x y haciendo $y' = p$, obtenemos

$$p = \varphi(p) + x\varphi'(p)\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx}, \tag{1.71}$$

o bien

$$[p - \varphi(p)]\frac{dx}{dp} = x\varphi'(p) + \psi'(p). \tag{1.72}$$

Esta ecuación es lineal en x y en $\frac{dx}{dp}$ y, por lo tanto, se integra fácilmente, por ejemplo, mediante el método de variación de la constante. Habiendo obtenido la integral $\Phi(x, p, c) = 0$ de la ecuación (1.72) y agregándole $y = x\varphi(p) + \psi(p)$, se obtienen las ecuaciones que determinan las curvas integrales buscadas.

Al pasar de la ecuación (1.71) a la (1.72), hubo que dividir entre $\frac{dp}{dx}$. Pero con esto se perdieron las soluciones — si éstas existen — para las cuales p es constante, lo que significa que $\frac{dp}{dx} = 0$. Considerando a p constante, notamos que la ecuación (1.71) se satisface sólo cuando p es raíz de la ecuación $p - \varphi(p) = 0$.

De esta manera, si la ecuación $p - \varphi(p) = 0$ tiene raíces reales $p = p_i$, entonces a las soluciones halladas más arriba de la ecuación de Lagrange hay que agregar $y = x\varphi(p) + \psi(p)$, $p = p_i$, o bien, eliminando p, $y = x\varphi(p_i) + \psi(p_i)$, que son líneas rectas.

Hay que estudiar separadamente el caso cuando $p - \varphi(p) \equiv 0$ y, por lo tanto, al dividir entre $\frac{dp}{dx}$ se pierde la solución $p = c$, donde c es una constante arbitraria. En este caso, $\varphi(y') \equiv y'$, y la ecuación $y = x\varphi(y') + \psi(y')$ toma la forma $y = xy' + \psi(y')$, que se llama *ecuación de Clairaut*. Haciendo $y' = p$, obtenemos $y = xp + \psi(p)$. Derivando respecto a x, tendremos

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx},$$

o bien

$$(x + \psi'(p))\frac{dp}{dx} = 0,$$

de donde o $\frac{dp}{dx} = 0$, es decir, $p = c$, o bien $x + \psi'(p) = 0$.

En el primer caso, eliminando p se obtiene

$$y = cx + \psi(c), \tag{1.73}$$

que es una familia monoparamétrica de rectas integrales. En el segundo caso, la solución se determina por las ecuaciones

$$y = xp + \psi(p) \text{ y } x + \psi'(p) = 0. \tag{1.74}$$

No es difícil comprobar que la curva integral, determinada por las ecuaciones (1.74), es la envolvente de la familia de rectas integrales (1.73).

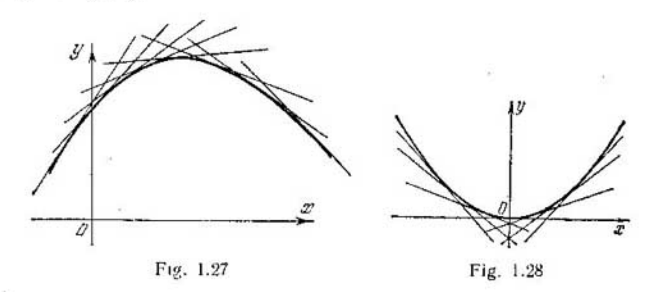


Fig. 1.27 Fig. 1.28

En efecto, la *envolvente* de cierta familia $\Phi(x, y, c) = 0$ se determina por las ecuaciones

$$\Phi(x, y, c) = 0 \text{ y } \frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0, \tag{1.75}$$

las cuales para la familia $y = cx + \psi(c)$ tienen la forma

$$y = cx + \psi(c), \; x + \psi'(c) = 0$$

y sólo se diferencian de la ecuación (1.74) en la notación empleada para el parámetro (fig. 1.27).

Observación. Como es sabido, las ecuaciones (1.75) pueden determinar, aparte de envolventes, lugares geométricos de puntos múltiples y, a veces, otras curvas; sin embargo, si al menos una de las derivadas $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ ó $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ es diferente de cero y ambas están acotadas en los puntos que satisfacen las ecuaciones (1.75), entonces dichas ecuaciones determinan sólo la envolvente. En este caso, estas condiciones se cumplen: $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -c$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 1$. Por lo tanto, las ecuaciones (1.75) determinan una envolvente, que puede degenerar en un punto si la familia (1.73) es un haz de rectas.

Ejemplo 6.

$$y = xy' - y'^2;\ \text{ecuación de Clairaut.}$$

La familia monoparamétrica de rectas integrales tiene la forma $y = cx - c^2$. Además, la envolvente de esta familia, determinada por las ecuaciones $y = cx - c^2$ y $x - 2c = 0$, es curva integral. Eliminando c, obtenemos $y = \frac{x^2}{4}$ (fig. 1.28).

Ejemplo 7.

$$y = 2xy' - y'^3;\ \text{ecuación de Lagrange.}$$

$$y' = p,$$

$$y = 2xp - p^3. \tag{1.76}$$

Derivando, se obtiene

$$p = 2p + 2x\frac{dp}{dx} - 3p^2\frac{dp}{dx} \tag{1.77}$$

y, luego de dividir entre $\frac{dp}{dx}$, llegamos a la ecuación

$$p\frac{dx}{dp} = -2x + 3p^2.$$

Integrando esta ecuación lineal, se obtiene $x = \frac{c_1}{p^2} + \frac{3}{4}p^2$. Por lo tanto, las curvas integrales se determinan por las ecuaciones $y = 2xp - p^3$, $x = \frac{c_1}{p^2} + \frac{3p^2}{4}$.

Al dividir entre $\frac{dp}{dx}$, como se dijo antes, se pierde la solución $p = p_i$, donde p_i son las raíces de la ecuación $p - \varphi(p) = 0$. En este caso, se pierde la solución $p = 0$ de la ecuación (1.77), a la cual le corresponde, en base a la ecuación (1.76), la solución $y = 0$ de la ecuación inicial.

§ 9. TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD PARA LAS ECUACIONES DIFERENCIALES NO RESUELTAS CON RESPECTO A LA DERIVADA. SOLUCIONES SINGULARES

En el § 6 fue demostrado el teorema de existencia y unicidad de la solución $y(x)$ de la ecuación $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ que satisface la condición $y(x_0) = y_0$. Un problema análogo surge también para la ecuación de la forma $F(x, y, y') = 0$. Es evidente que para estas ecuaciones, por cierto punto (x_0, y_0) en general pasa no una, sino varias curvas integrales, puesto que resolviendo la ecuación $F(x, y, y') = 0$ con respecto a y', por regla general obtenemos no uno, sino varios valores reales $y' = f_i(x, y)$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Si cada ecuación $y' = f_i(x, y)$ en un entorno del punto (x_0, y_0) satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad del § 6, entonces para cada ecuación existe una solución única que satisface la condición $y(x_0) = y_0$. Por eso, la propiedad de unicidad de la solución de la ecuación $F(x, y, y') = 0$, que satisface la condi-

ción $y(x_0)=y_0$, se entiende generalmente en el sentido de que por el punto dado (x_0, y_0), *en la dirección dada*, no pasa más de una curva integral de la ecuación $F(x, y, y')=0$.

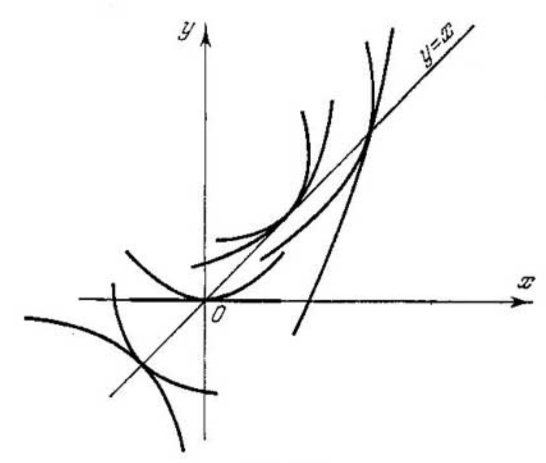


Fig. 1.29

Por ejemplo, para las soluciones de la ecuación $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-1=0$ la propiedad de unicidad se cumple en todas partes, ya que por cada punto (x_0, y_0) pasan dos curvas integrales, pero en diferentes direcciones. En efecto,

$$\frac{dy}{dx}=\pm 1, \quad y=x+c \text{ e } y=-x+c.$$

Para la ecuación $(y')^2-(x+y)y'+xy=0$, considerada en la pág. 71, la propiedad de unicidad se viola en los puntos de la recta $y=x$, puesto que por los puntos de dicha recta pasan las curvas integrales de las ecuaciones $y'=x$ e $y'=y$ en una misma dirección (fig. 1.29).

Teorema 1.5. *Existe una solución única $y=y(x)$, $x_0-h_0\leqslant x\leqslant x_0+h_0$, donde h_0 es suficientemente pequeño, de la ecuación*

$$F(x, y, y')=0, \tag{1.78}$$

que satisface la condición $y(x_0)=y_0$, para la cual $y'(x_0)=y_0'$, donde y_0' es una de las raíces reales de la ecuación $F(x_0, y_0, y')=0$, si en un entorno cerrado del punto (x_0, y_0, y_0') la función $F(x, y, y')$ *satisface las siguientes condiciones:*

1) *$F(x, y, y')$ es continua en todos sus argumentos;*

2) *la derivada* $\frac{\partial F}{\partial y'}$ *existe y es diferente de cero;*

3) *existe la derivada* $\frac{\partial F}{\partial y}$, *acotada en valor absoluto,*

$$\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| \leqslant N_1.$$

D e m o s t r a c i ó n. De acuerdo con el conocido teorema sobre la existencia de la función implícita, se puede afirmar que las condiciones 1) y 2) garantizan la existencia de una función única $y' = f(x, y)$, continua en un entorno del punto (x_0, y_0), la cual se determina por la ecuación (1.78) y satisface la condicion $y_0' = f(x_0, y_0)$. Queda por comprobar si la función $f(x, y)$ satisface o no la condición de Lipschitz, o la condición más grosera $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leqslant N$ en un entorno del punto (x_0, y_0). De ser así, se podría afirmar que la ecuación

$$y' = f(x, y) \tag{1.79}$$

satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad (véase el § 6, pág. 43), y que existe, por lo tanto, una solución única de la ecuación (1.79) que satisface la condición $y(x_0) = y_0$, así como que existe una curva integral única de la ecuación (1.78) que pasa por el punto (x_0, y_0) y que tiene en éste el coeficiente angular de la tangente igual a y_0'.

Según el conocido teorema sobre funciones implícitas, se puede afirmar que al cumplirse las condiciones 1), 2) y 3) la derivada $\frac{\partial f}{\partial y}$ existe y puede ser calculada por la regla de derivación de las funciones implícitas.

Derivando la identidad $F(x, y, y') = 0$ respecto a y, y tomando en cuenta que $y' = f(x, y)$, se obtiene

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

o bien

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial y'}},$$

de donde, considerando también las condiciones 2) y 3), se deduce que $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leqslant N$ en un entorno cerrado del punto (x_0, y_0).

El conjunto de puntos (x, y) en los cuales se viola la unicidad de la solución de la ecuación.

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1.78}$$

se llama conjunto *singular*.

En los puntos del conjunto singular debe violarse por lo menos una de las condiciones del teorema 1.5. Para las ecuaciones diferenciales que se encuentran en los problemas prácticos se cumplen generalmente las condiciones 1) y 3), pero la condición 2), $\frac{\partial F}{\partial y'} \neq 0$, con frecuencia se viola.

Si las condiciones 1) y 3) se cumplen, en los puntos del conjunto singular deben cumplirse simultáneamente las ecuaciones

$$F(x, y, y') = 0 \text{ y } \frac{\partial F}{\partial y'} = 0. \tag{1.80}$$

Eliminando a y' de estas ecuaciones, obtenemos la ecuación

$$\Phi(x, y) = 0, \tag{1.81}$$

a la cual deben satisfacer los puntos del conjunto singular. Sin embargo, no en cada punto que satisface la ecuación (1.81) se viola obligatoriamente la unicidad de la solución de la ecuación (1.78), ya que las condiciones del teorema 1.5 son sólo suficientes para la unicidad de la solución, y no necesarias; por lo tanto, la violación de cualquier condición del teorema no implica necesariamente la violación de la unicidad.

De esta manera, sólo entre los puntos de la curva $\Phi(x, y) = 0$, llamada *curva p-discriminante* (debido a que la ecuación (1.80) se escribe frecuentemente en la forma $F(x, y, p) = 0$ y $\frac{\partial F}{\partial p} = 0$), pueden haber puntos del conjunto singular.

Si una rama $y = \varphi(x)$ de la curva $\Phi(x, y) = 0$ pertenece al conjunto singular, y es al mismo tiempo curva integral, entonces se llama *curva integral singular*, y la función $y = \varphi(x)$, *solución singular*.

De este modo, para hallar la solución singular de la ecuacion

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1.78}$$

hay que hallar la curva p-discriminante, determinada por las ecuaciones

$$F(x, y, p) = 0, \quad \frac{\partial F}{p\partial} = 0;$$

luego, aclarar por sustitución directa en la ecuación (1.78) si entre las ramas de la curva p-discriminante hay curvas integrales; si las hay, debe comprobarse además si se viola o no la unicidad en los puntos de estas curvas. Si la unicidad se viola, la rama de la curva p-discriminante es curva integral singular.

Ejemplo 1. ¿Tiene solución singular la ecuación de Lagrange $y = 2xy' - (y')^2$?

Las condiciones 1) y 3) del teorema de existencia y unicidad se cumplen. La curva p-discriminante se determina por las ecuaciones: $y=2xp-p^2$, $2x-2p=0$, o bien, eliminando p, $y=x^2$. Esta parábola no es una curva integral, ya que la función $y=x^2$ no satisface la ecuación inicial. Por lo tanto, no hay solución singular.

Ejemplo 2. Hallar la solución singular de la ecuación de Lagrange

$$x-y=\frac{4}{9}(y')^2-\frac{8}{27}(y')^3. \qquad (1.82)$$

Fig. 1.30

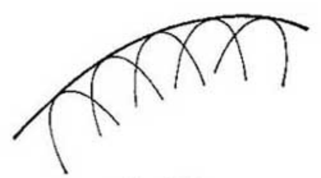


Fig. 1.31

Las condiciones 1) y 3) del teorema de existencia y unicidad se cumplen. La curva p-discriminante se determina por las ecuaciones

$$x-y=\frac{4}{9}p^2-\frac{8}{27}p^3, \qquad \frac{8}{9}(p-p^2)=0.$$

De la segunda ecuación se halla $p=0$, o bien $p=1$; sustituyendo en la primera ecuación, se obtiene

$$y=x, \text{ o bien } y=x-\frac{4}{27}.$$

Sólo la segunda función es solución de la ecuación original.

Para aclarar si la solución $y=x-\frac{4}{27}$ es singular o no, hay que integrar la ecuación (1.82) y aclarar si pasan otras curvas integrales por los puntos de la recta $y=x-\frac{4}{27}$ en la dirección de dicha recta. Integrando la ecuación de Lagrange (1.82), se obtiene

$$(y-c)^2=(x-c)^3. \qquad (1.83)$$

De la ecuación (1.83) y de la fig. 1.30 se ve que la recta $y=x-\frac{4}{27}$ es la envolvente de la familia de parábolas semicúbicas $(y-c)^2=(x-c)^3$. Por lo tanto, en cada punto de dicha recta se viola la unicidad, puesto que en una misma dirección pasan dos curvas integrales: la recta $y=x-\frac{4}{27}$ y la parábola semicúbica, tangente a esta recta en el punto considerado.

De esta manera, $y=x-\frac{4}{27}$ es solución singular.

En este ejemplo la envolvente de la familia de curvas integrales es solución singular.

Si llamamos envolvente de la familia

$$\Phi(x, y, c)=0 \qquad (1.84)$$

a la curva que en cada uno de sus puntos es tangente a cierta curva de la familia (1.84) y en cada segmento es tangente a infinitas curvas de dicha familia, entonces la envolvente de la familia de curvas integrales de cierta ecuación $F(x, y, y')=0$ será siempre una curva integral singular.

En efecto, en los puntos de la envolvente los valores de x, y e y' coinciden con los valores de x, y e y' para la curva integral que es tangente a la envolvente en el punto (x, y). Por consiguiente, en cada punto de la envolvente los valores de x, y e y' satisfacen la ecuación $F(x, y, y')=0$, es decir, la envolvente es una curva integral (fig. 1.31). En cada punto de la envolvente se viola la unicidad, ya que por sus puntos pasan por lo menos dos curvas integrales en una misma dirección: la envolvente y la curva integral de la familia (1.84), tangente a ella en el punto considerado. En consecuencia, la envolvente es curva integral singular.

Conociendo la familia de curvas integrales $\Phi(x, y, c)=0$ de cierta ecuación diferencial $F(x, y, y')=0$, se pueden determinar sus soluciones singulares hallando la envolvente. Como es sabido del curso de análisis matemático, la envolvente está incluída en la curva c-discriminante, determinada por las ecuaciones

$$\Phi(x, y, c)=0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial\Phi}{\partial c}=0.$$

Sin embargo, aparte de la envolvente, en la curva c-discriminante pueden estar incluídos también otros conjuntos, por ejemplo, el conjunto de puntos múltiples de las curvas de la familia considerada, en los cuales $\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{\partial\Phi}{\partial y}=0$. Para que cierta rama de la curva c-discriminante sea con seguridad envolvente, es suficiente que en ella:

1) existan las derivadas parciales, acotadas en valor absoluto,

$$\left|\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right|\leqslant N_1, \quad \left|\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right|\leqslant N_2;$$

2) $\frac{\partial\Phi}{\partial x}\neq 0$, o bien $\frac{\partial\Phi}{\partial y}\neq 0$.

Obsérvese que estas condiciones son sólo suficientes, por lo cual las curvas en las que se viola una de las condiciones 1) o 2) también pueden ser envolventes.

Ejemplo 3. Dada la familia de curvas integrales $(y-c)^2=(x-c)^3$ de cierta ecuación diferencial (véase el ejemplo 2, pág. 82), hallar la solución singular de ésta.

Hallamos la curva c-discriminante:

$$(y-c)^2=(x-c)^3 \quad \text{y} \quad 2(y-c)=3(x-c)^2.$$

Eliminando el parámetro c, se obtiene

$$y=x \text{ y } x-y-\frac{4}{27}=0.$$

La recta $y=x-\frac{4}{27}$ es envolvente, ya que para ella se cumplen todas las condiciones del teorema sobre envolvente. La función $y=x$ no satisface la ecuación diferencial. La recta $y=x$ es el lugar geométrico de los puntos de retroceso (véase la fig. 1.30). En los puntos de esta recta se viola la segunda condición del teorema sobre envolvente.

Ejemplo 4. Dada la familia de curvas integrales

$$y^{1/5}-x+c=0 \tag{1.85}$$

de cierta ecuación diferencial de primer orden, hallar la solución singular de ésta.

El problema se reduce a la búsqueda de la envolvente de la familia considerada. Si se aplica directamente el método indicado anteriormente sobre la búsqueda de la envolvente, obtenemos la igualdad contradictoria $1=0$, por lo que sería natural concluir que la familia (1.85) no tiene envolvente. Sin embargo, en este caso la derivada del primer miembro de la ecuación (1.85) respecto a y, $\frac{\partial \Phi}{\partial y}=\frac{1}{5}y^{-\frac{4}{5}}$ se vuelve infinito para $y=0$; por lo tanto, no se excluye la posibilidad de que $y=0$ sea envolvente de la familia (1.85) que no se pudo hallar por el método general debido a la violación del teorema sobre envolvente en la recta $y=0$.

Debe transformarse la ecuación (1.85) de manera que para la ecuación transformada, equivalente a la inicial, se cumplan las condiciones del teorema sobre envolvente. Por ejemplo, escribamos la ecuación (1.85) en la forma $y-(x-c)^5=0$. Ahora las condiciones del teorema sobre envolvente se cumplen, y aplicando el método general, obtenemos

$$y=(x-c)^5, \qquad 5(x-c)^4=0,$$

o, eliminando c, se obtiene la ecuación de la envolvente $y=0$ (fig. 1.32).

Ejemplo 5. Dada la familia de curvas integrales

$$y^2-(x-c)^3=0 \tag{1.86}$$

de cierta ecuación diferencial de primer orden, hallar la solución singular de ésta.

La curva c-discriminante se determina por las ecuaciones

$$y^2-(x-c)^3=0 \text{ y } x-c=0,$$

o, eliminando c, se tiene $y=0$. En la recta $y=0$ se reducen a cero ambas derivadas parciales, $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ y $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$, del primer miembro de la ecuación (1.86); por lo tanto, $y=0$ es el lugar geométrico de los puntos múltiples de las curvas de la

familia (1.86), en este caso, de los puntos de retroceso. Sin embargo, este lugar geométrico en el ejemplo considerado es a la vez también envolvente. En la fig. 1.33 se muestran las parábolas semicúbicas (1.86) y su envolvente $y=0$.

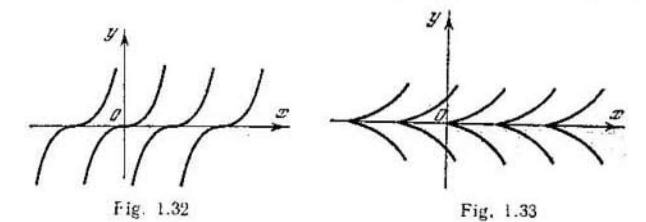


Fig. 1.32 Fig. 1.33

EJERCICIOS DEL CAPITULO 1

1. $\operatorname{tg} y\,dx - \operatorname{ctg} x\,dy = 0$.
2. $(12x+5y-9)\,dx + (5x+2y-3)\,dy = 0$.
3. $x\dfrac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2+y^2}$.
4. $x\dfrac{dy}{dx} + y = x^3$.
5. $y\,dx - x\,dy = x^2 y\,dy$.
6. $\dfrac{dx}{dt} + 3x = e^{2t}$.
7. $y \operatorname{sen} x + y' \cos x = 1$.
8. $y' = e^{x-y}$.
9. $\dfrac{dx}{dt} = x + \operatorname{sen} t$.
10. $x(\ln x - \ln y)\,dy - y\,dx = 0$.
11. $xy(y')^2 - (x^2+y^2)y' + xy = 0$.
12. $(y')^2 = 9y^4$.
13. $\dfrac{dx}{dt} = e^{\frac{x}{t}} + \dfrac{x}{t}$.
14. $x^2 + (y')^2 = 1$.
15. $y = xy' + \dfrac{1}{y'}$.
16. $x = (y')^3 - y' + 2$.
17. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x+y^3}$.
18. $y = (y')^4 - (y')^3 - 2$.

19. Hallar las trayectorias ortogonales de la familia $xy=c$, es decir, hallar las curvas que cortan ortogonalmente a las curvas de la familia dada.

20. Hallar la curva cuya subtangente es igual al doble de la abscisa del punto de tangencia.

21. Hallar la curva para la cual el segmento que determina la tangente en el eje de las ordenadas es igual a la abscisa del punto de tangencia.

22. Hallar las trayectorias ortogonales de la familia

$$x^2+y^2=2ax.$$

23. Considerando que la velocidad de enfriamiento de cualquier cuerpo en el aire es proporcional a la diferencia entre las temperaturas de dicho cuerpo y del aire, resolver el siguiente problema: si la temperatura del aire es igual a 20° C y el cuerpo se enfría durante 20 minutos deste 100 hasta 60° C, ¿después de cuánto tiempo la temperatura del cuerpo alcanzará a 30° C?

24. Una lancha a motor se mueve en agua calma con velocidad de 10 km/h. A plena carrera su motor fue apagado, y después de $t=20$ seg la velocidad de la lancha disminuyó hasta $v_1=6$ km/h. Determinar la velocidad de la lancha dos minutos después de parar el motor, considerando que la resistencia del agua es proporcional a la velocidad de movimiento de la lancha.

25. Hallar la forma de un espejo que refleja paralelamente a una dirección dada todos los rayos que salen de un punto dado.

26. $y'^2 + y^2 = 4$.

27. Hallar la curva cuyo segmento de tangente que se encuentra entre los ejes coordenados se divide en el punto de tangencia en partes iguales.

28. $\frac{dy}{dx} = \frac{2y - x - 4}{2x - y + 5}$. 29. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{1 + x} + y^2 = 0$.

30. Integrar numéricamente la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = x + y^2, \qquad y(0) = 0.$$

Determinar $y(0,5)$ con una exactitud de 0,01.

31. Integrar numéricamente la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = xy^3 + x^2, \qquad y(0) = 0.$$

Determinar $y(0,6)$ con una exactitud de 0,01.

32. $y' = 1{,}31x - 0{,}2y^2$, $y(0) = 2$.

Construir la tabla de quince valores de y con paso $h = 0{,}02$.

33. $y = 2xy' - y'^2$. 34. $\frac{dy}{dx} = \cos(x - y)$.

35. Aplicando el método de las isoclinas (véase la pág. 19), hacer un esbozo de la familia de curvas integrales de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - y^2.$$

36. $(2x + 2y - 1)\,dx + (x + y - 2)\,dy = 0$.

37. $y'^3 - y'e^{2x} = 0$.

38. Hallar las trayectorias ortogonales a las parábolas $y^2 + 2ax = a^2$.

39. ¿Tiene solución singular la ecuación diferencial $y = 5xy' - (y')^2$?

40. Integrar aproximadamente la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = x - y^2, \qquad y(1) = 0$$

por el método de las aproximaciones sucesivas (determinar y_1 e y_2).

41. $y = x^2 + \int_1^x \frac{y}{x}\,dx$.

42. ¿Tiene solución singular la ecuación $y' = \sqrt[3]{x - 5y} + 2$?

43. $(x - y)\,y\,dx - x^2\,dy = 0$.

44. Hallar las trayectorias ortogonales a la familia $y^2 = cx^3$.

45. $\dot{x} + 5x = 10t + 2$ para $t = 1$, $x = 2$.

46. $\dot{x} = \frac{x}{t} + \frac{x^2}{t^3}$ para $t = 2$, $x = 4$.

47. $y = xy' + y'^2$ para $x = 2$, $y = -1$.

48. $y = xy' + y'^2$ para $x = 1$, $y = -1$.

49. $\frac{dy}{dx} = \frac{3x - 4y - 2}{3x - 4y - 3}$.

50. $\dot{x} - x \operatorname{ctg} t = 4 \operatorname{sen} t$.

51. $y = x^2 + 2y'x + \frac{y'^2}{2}$.

52. $y' - \frac{3y}{x} + x^3 y^2 = 0.$

53. $y(1 + y'^2) = a.$

54. $(x^2 - y)\,dx + (x^2 y^2 + x)\,dy = 0.$

55. Hallar un factor integrante de la ecuación

$$(3y^2 - x)\,dx + 2y(y^2 - 3x)\,dy = 0.$$

de la forma $\mu = \mu(x + y^2)$.

56. $(x - y)\,y\,dx - x^2\,dy = 0.$

57. $y' = \frac{x + y - 3}{1 - x + y}.$

58. $xy' - y^2 \ln x + y = 0.$

59. $(x^2 - 1)\,y' + 2xy - \cos x = 0.$

60. $(4y + 2x + 3)\,y' - 2y - x - 1 = 0.$

61. $(y^2 - x)\,y' - y + x^2 = 0.$

62. $(y^2 - x^2)\,y' + 2xy = 0.$

63. $3xy^2 y' + y^3 - 2x = 0.$

64. $(y')^2 + (x + a)\,y' - y = 0$, donde a es una constante.

65. $(y')^2 - 2xy' + y = 0.$

66. $(y')^2 + 2yy' \operatorname{ctg} x - y^2 = 0.$

CAPITULO 2

Ecuaciones diferenciales de orden mayor que 1

§ 1. TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD PARA LA ECUACION DIFERENCIAL DE n-ESIMO ORDEN

Las ecuaciones diferenciales de n-ésimo orden tienen la forma

$$y^{(n)}=f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{2.1}$$

o bien, si no están resueltas con respecto a la derivada de orden mayor:

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})=0.$$

El teorema de existencia y unicidad para ecuación de n-ésimo orden se puede obtener fácilmente, llevándola a un sistema de ecuaciones para el cual fue demostrado dicho teorema en la pág. 54.

En efecto, si en la ecuación $y^{(n)}=f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ se consideran como funciones desconocidas no solamente y, sino también $y'=y_1$, $y''=y_2$, $\ldots$, $y^{(n-1)}=y_{n-1}$, entonces la ecuación (2.1) se sustituye por el sistema

$$\left.\begin{aligned} y' &= y_1, \\ y_1' &= y_2, \\ &\cdots\cdots \\ y_{n-2}' &= y_{n-1}, \\ y_{n-1}' &= f(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1}), \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

siendo posible ahora aplicar el teorema de existencia y unicidad de la solución de un sistema de ecuaciones (véase la pág. 54). Según este teorema, si los segundos miembros de todas las ecuaciones del sistema (2.2) son continuos en la región considerada y satisfacen la condición de Lipschitz en todos los argumentos, excepto x, entonces existe una solución única del sistema (2.2), que satisface las condiciones

$$y(x_0)=y_0, \; y_1(x_0)=y_{10}, \; \ldots, \; y_{n-1}(x_0)=y_{n-1,0}.$$

Los segundos miembros de las $n-1$ primeras ecuaciones de (2.2) son continuos y satisfacen no sólo la condición de Lipschitz, sino también la condición más grosera de existencia de derivadas acotadas respecto a $y, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$. Por lo tanto, las condiciones

del teorema de existencia y unicidad se cumplen si el segundo miembro de la última ecuación $y'_{n-1}=f(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1})$ es continuo en un entorno de las condiciones iniciales, y satisface la condición de Lipschitz para todos los argumentos, comenzando desde el segundo, o la condición más grosera de existencia de derivadas parciales acotadas respecto a todos los argumentos, a partir del segundo.

Volviendo a las variables iniciales x e y obtenemos, en definitiva, el siguiente teorema de existencia y unicidad:

Teorema 2.1. *Si en un entorno de las condiciones iniciales* $(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)})$ *la función f es continua en todos sus argumentos y satisface la condición de Lipschitz respecto a todos los argumentos a partir del segundo, existe una solución única de la ecuación diferencial de n-ésimo orden* $y^{(n)}=f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ *que satisface las condiciones*

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y'_0,\ y''(x_0)=y''_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}.$$

La última condición puede ser sustituida por la condición más grosera sobre la existencia, en dicho entorno, de derivadas parciales acotadas de primer orden de la función f respecto a todos los argumentos, a partir del segundo.

Se llama *solución general* de la ecuación diferencial de n-ésimo orden al conjunto de soluciones formado por todas las soluciones particulares, sin excepción. Si el segundo miembro de la ecuación

$$y^{(n)}=f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) \qquad (2.1)$$

satisface, en cierta región de variación de sus argumentos, las condiciones del teorema de existencia y unicidad, entonces la solución general de la ecuación (2.1) depende de n parámetros, en calidad de los cuales se pueden tomar, por ejemplo, las condiciones iniciales de la función buscada y de sus derivadas $y_0, y'_0, y''_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$. En particular, la solución general de la ecuación de segundo grado $y''=f(x, y, y')$ depende de dos parámetros, por ejemplo, de y_0 y de y'_0. Si fijamos y_0 e y'_0, o sea, damos el punto (x_0, y_0) y la dirección de la tangente a la curva integral buscada en dicho punto, entonces, si se cumplen las condiciones del teorema de existencia y unicidad, mediante estas condiciones de determinará una sola curva integral.

Por ejemplo, la ecuación del movimiento rectilíneo de un punto material de masa m bajo la acción de la fuerza $f(t, x, \dot{x})$:

$$m\ddot{x}=f(t, x, \dot{x}),$$

la posición inicial del punto $x(t_0)=x_0$ y la velocidad inicial

$x(t_0)=x_0$ determinan una solución única, una ley única de movimiento $x=x(t)$ si, por supuesto, la función f satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad.

El teorema sobre la dependencia continua de la solución con respecto a los parámetros y a los valores iniciales, considerado en la pág. 56 se generaliza, sin cambiar el método de demostración, a sistemas de ecuaciones diferenciales y, por lo tanto, a las ecuaciones de n-ésimo orden.

§ 2. CASOS SIMPLES DE REDUCCION DEL ORDEN

En ciertos casos el orden de la ecuación diferencial puede ser reducido, lo que a menudo facilita su integración.

Señalemos algunas clases de ecuaciones que se encuentran con mayor frecuencia y que pueden reducir su orden.

1. *La ecuación no contiene la función buscada y sus derivadas hasta el orden $k-1$ inclusive:*

$$F(x,\ y^{(k)},\ y^{(k+1)},\ \ldots,\ y^{(n)})=0 \tag{2.3}$$

En este caso el orden de la ecuación puede ser reducido a $n-k$, mediante el cambio de variables $y^{(k)}=p$.

En efecto, luego del cambio de variables, la ecuación (2.3) toma la forma

$$F(x,\ p,\ p',\ \ldots,\ p^{(n-k)})=0.$$

De esta ecuación se determina $p=p(x,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_{n-k})$, e y se halla de $y^{(k)}=p(x,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_{n-k})$ integrando k veces. En particular, si la ecuación de segundo orden no contiene a y, entonces la sustitución de variables $y'=p$ conduce a una ecuación de primer orden.

Ejemplo 1.

$$\frac{d^5y}{dx^5}-\frac{1}{x}\frac{d^4y}{dx^4}=0.$$

Haciendo $\frac{d^4y}{dx^4}=p$, obtenemos $\frac{dp}{dx}-\frac{1}{x}p=0$; separando variables e integrando, tendremos: $\ln|p|=\ln|x|+\ln c$, o bien $p=cx$, $\frac{d^4y}{dx^4}=cx$, de donde

$$y=c_1x^5+c_2x^3+c_3x^2+c_4x+c_5.$$

Ejemplo 2. Hallar la ley de movimiento de un cuerpo que cae sin velocidad inicial en la atmósfera, considerando la resistencia del aire proporcional al cuadrado de la velocidad.

La ecuación de movimiento tiene la forma

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=mg-k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2,$$

donde s es el espacio recorrido por el cuerpo; m, la masa del mismo; t, el tiempo. Para $t=0$, se tiene $s=0$ y $\frac{ds}{dt}=0$.

La ecuación no contiene explícitamente a la función incógnita s; por lo tanto, se puede reducir el orden de la misma considerando $\frac{ds}{dt}=v$. Entonces la ecuación de movimiento toma la forma

$$m\frac{dv}{dt}=mg-kv^2.$$

Separando variables e integrando, se obtiene

$$\frac{m\,dv}{mg-kv^2}=dt;\quad t=m\int_0^v\frac{dv}{mg-kv^2}=\frac{1}{k\sqrt{g}}\operatorname{Arth}\frac{kv}{\sqrt{g}},$$

de donde $v=\frac{\sqrt{g}}{k}\operatorname{th}(k\sqrt{g}\,t)$; multiplicando por dt e integrando nuevamente, hallamos la ley de movimiento:

$$s=\frac{1}{k^2}\ln\operatorname{ch}(k\sqrt{g}\,t).$$

2. La ecuación no contiene a la variable independiente:

$$F(y,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(n)})=0.$$

En este caso el orden de la ecuación se puede reducir en una unidad, por medio de la sustitución $y'=p$; además, p se considera nueva función desconocida de y, $p=p(y)$ y, por lo tanto, todas las derivadas $\frac{d^ky}{dx^k}$ deben expresarse por medio de las derivadas de la nueva función desconocida $p(y)$ respecto a y:

$$\frac{dy}{dx}=p,$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}p,$$
$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dy}p\right)=\frac{d}{dy}\left(\frac{dp}{dy}p\right)\frac{dy}{dx}=\frac{d^2p}{dy^2}p^2+\left(\frac{dp}{dy}\right)^2p$$

y análogamente para las derivadas de orden superior. Además, es evidente que la derivada $\frac{d^ky}{dx^k}$ se expresa mediante las derivadas de p respecto a y de orden no superior a $k-1$, lo cual precisamente conduce a la disminución del orden en una unidad.

En particular, si la ecuación de segundo orden no contiene a la variable independiente, entonces la sustitución de variables señalada conduce a una ecuación de primer orden.

Ejemplo 3.

$$y\frac{d^2y}{dx^2}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0.$$

Haciendo $\frac{dy}{dx}=p$, $\frac{d^2y}{dx^2}=p\frac{dp}{dy}$, obtenemos una ecuación de variables separables: $yp\frac{dp}{dy}-p^2=0$, cuya solución general es igual a $p=c_1y$, o bien $\frac{dy}{dx}=c_1y$. Separando variables nuevamente e integrando, se obtiene $\ln|y|=c_1x+\ln c_2$, o bien $y=c_2e^{c_1x}$.

Ejemplo 4. Integrar la ecuación del péndulo matemático $\ddot{x}+a^2\operatorname{sen}x=0$ con condiciones iniciales $x(0)=x_0$, $\dot{x}(0)=0$.

Reducimos el orden, haciendo

$$\dot{x}=v,\quad \ddot{x}=v\frac{dv}{dx},\quad v\,dv=-a^2\operatorname{sen}x\,dx,$$

$$\frac{v^2}{2}=a^2(\cos x-\cos x_0),\quad v=\pm a\sqrt{2(\cos x-\cos x_0)},$$

$$\frac{dx}{dt}=\pm a\sqrt{2(\cos x-\cos x_0)},\quad t=\pm\frac{1}{a\sqrt{2}}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{\cos x-\cos x_0}}.$$

La integral del segundo miembro no se resuelve en funciones elementales, pero se reduce fácilmente a funciones elípticas.

3. El primer miembro de la ecuación

$$F(x,\ y,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(n)})=0 \tag{2.4}$$

es la derivada de cierta expresión diferencial $\Phi(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)})$ de orden $n-1$.

En este caso se halla fácilmente la llamada *primera integral*, o sea, una ecuación diferencial de orden $n-1$, que contiene una constante arbitraria, y que es equivalente a la ecuación dada de n-ésimo orden, con lo cual reducimos el orden de la ecuación en una unidad. Efectivamente, la ecuación (2.4) puede escribirse en la forma

$$\frac{d}{dx}\Phi(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)})=0. \tag{2.4$_1$}$$

Si $y(x)$ es solución de la ecuación (2.4$_1$), entonces la derivada de la función $\Phi(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)})$ es idénticamente nula. Por lo tanto, la función $\Phi(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)})$ es igual a una constante, con lo que se obtiene la primera integral

$$\Phi(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)})=c.$$

Ejemplo 5.

$$yy''+(y')^2=0.$$

Esta ecuación se puede escribir en la forma $d(yy')=0$, de donde $yy'=c_1$, o bien $y\,dy=c_1\,dx$. Por lo tanto, la integral general será $y^2=c_1x+c_2$.

A veces el primer miembro de la ecuación $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})=0$ se convierte en derivada de la expresión diferencial $\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ de orden $n-1$ sólo después de multiplicarlo por un factor $\mu(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$.

Ejemplo 6.

$$yy''-(y')^2=0.$$

Multiplicando por el factor $\mu=\frac{1}{y^2}$, se obtiene $\frac{yy''-(y')^2}{y^2}=0$, o bien $\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{y}\right)=0$, de donde $\frac{y'}{y}=c_1$, ó $\frac{d}{dx}\ln|y|=c_1$. Por lo tanto, $\ln|y|=c_1x+\ln c_2$, $c_2>0$, de donde $y=c_2e^{c_1x}$, $c_2\neq 0$, como en el ejemplo 3 de este parágrafo.

Observación. Al multiplicar por el factor $\mu(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ se pueden introducir soluciones superfluas, que reducen dicho factor a cero. Si μ es discontinuo, pueden también perderse soluciones. En el ejemplo 6, al multiplicar por $\mu=\frac{1}{y^2}$ se perdió la solución $y=0$; sin embargo, puede incluirse en la solución obtenida $y=\bar{c}_2e^{c_1x}$, si se considera que $\bar{c}_2$ puede tomar el valor 0.

4. La ecuación $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})=0$ es homogénea con respecto a los argumentos $y, y', \ldots, y^{(n)}$.

El orden de la ecuación homogénea respecto a $y, y', \ldots, y^{(n)}$

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})=0, \tag{2.5}$$

es decir, de la ecuación para la cual se cumple la identidad

$$F(x, ky, ky', \ldots, ky^{(n)})=k^pF(x, y, y', \ldots, y^{(n)}),$$

puede ser reducido en una unidad por medio de la sustitución $y=e^{\int z\,dx}$, donde z es una nueva función desconocida. En efecto, derivando, se obtiene

$$\begin{aligned}
y' &= e^{\int z\,dx}z,\\
y'' &= e^{\int z\,dx}(z^2+z'),\\
y''' &= e^{\int z\,dx}(z^3+3zz'+z''),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y^{(k)} &= e^{\int z\,dx}\Phi(z, z', z'', \ldots, z^{(k-1)})
\end{aligned}$$

(se puede comprobar la veracidad de esta igualdad mediante el método de inducción completa).

Sustituyendo en (2.5) y observando que en base a la homogeneidad el factor $e^{p\int z\,dx}$ se puede sacar fuera del símbolo de la función F, obtenemos

$$e^{p\int z\,dx} f(x, z, z', \ldots, z^{(n-1)})=0$$

o bien, dividiendo entre $e^{p\int z\,dx}$, tendremos

$$f(x, z, z', \ldots, z^{(n-1)})=0.$$

Ejemplo 7.

$$yy''-(y')^2=6xy^2.$$

Haciendo $y=e^{\int z\,dx}$, obtenemos $z'=6x$, $z=3x^2+c_1$, $y=e^{\int (3x^2+c_1)\,dx}$, o bien $y=c_2e^{(x^3+c_1x)}$.

En las aplicaciones se encuentran con particular frecuencia ecuaciones diferenciales de segundo orden que pueden reducir su orden.

1)

$$F(x, y'')=0. \tag{2.6}$$

En esta ecuación se puede disminuir el orden mediante la sustitución $y'=p$, y reducirla a la ecuación $F\left(x, \frac{dp}{dx}\right)=0$, considerada en la pág. 72.

La ecuación (2.6) se puede resolver con respecto al segundo argumento, $y''=f(x)$, e integrar dos veces, o introducir un parámetro y sustituir la ecuación (2.6) por su representación paramétrica

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\varphi(t), \quad x=\psi(t),$$

de donde

$$dy'=y''dx=\varphi(t)\,\psi'(t)\,dt, \quad y'=\int\varphi(t)\,\psi'(t)\,dt+c_1,$$

$$dy=y'dx, \quad y=\int\left[\int\varphi(t)\,\psi'(t)\,dt+c_1\right]\psi'(t)\,dt+c_2.$$

2)

$$F(y', y'')=0. \tag{2.7}$$

Haciendo $y'=p$, se lleva (2.7) a la ecuación (1.61), pág. 73, o bien se representa la ecuación (2.7) en forma paramétrica:

$$y'_x=\varphi(t), \quad y''_{xx}=\psi(t),$$

de donde

$$dx=\frac{dy'}{y''}=\frac{\varphi'(t)\,dt}{\psi(t)}, \quad x=\int\frac{\varphi'(t)\,dt}{\psi(t)}+c_1,$$

luego de lo cual y se determina por cuadratura:

$$dy = y'dx = \varphi(t)\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt, \quad y = \int \frac{\varphi(t)\varphi'(t)}{\psi(t)}dt + c_2.$$

3)
$$F(y, y'') = 0. \tag{2.8}$$

Se puede reducir el orden haciendo

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}.$$

Si la ecuación (2.8) se resuelve fácilmente con respecto al segundo argumento, $y'' = f(y)$, entonces, multiplicando esta ecuación por $2y'dx = 2dy$, obtenemos $d(y')^2 = 2f(y)\,dy$, de donde

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{2\int f(y)\,dy + c_1} \quad \pm\frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)\,dy + c_1}} = dx,$$

$$x + c_2 = \pm\int \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)\,dy + c_1}}.$$

La ecuación (2.8) se puede sustituir por su representación paramétrica $y = \varphi(t)$, $y'' = \psi(t)$; entonces de $dy' = y''dx$ y de $dy = y'dx$, se obtiene $y'dy' = y''dy$, o bien

$$\frac{1}{2}d(y')^2 = \psi(t)\varphi'(t)\,dt,$$

$$(y')^2 = 2\int \psi(t)\varphi'(t)\,dt + c_1,$$

$$y' = \pm\sqrt{2\int \psi(t)\varphi'(t)\,dt + c_1},$$

luego de lo cual, de $dy = y'dx$ se halla dx, y después x:

$$dx = \frac{dy}{y'} = \pm\frac{\varphi'(t)\,dt}{\sqrt{2\int \psi(t)\varphi'(t)\,dt + c_1}},$$

$$x = \pm\int \frac{\varphi'(t)\,dt}{\sqrt{2\int \psi(t)\varphi'(t)\,dt + c_1}} + c_2. \tag{2.9}$$

Las ecuaciones (2.9) e $y = \varphi(t)$ determinan en forma paramétrica la familia de curvas integrales.

Ejemplo 8.

$$y'' = 2y^3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

Multiplicando ambos miembros de esta ecuación por $2y'dx$, se obtiene $d(y')^2 = 4y^3dy$, de donde $(y')^2 = y^4 + c_1$. Teniendo en cuenta las condiciones

iniciales, se halla que $c_1=0$ e $y'=y^2$. Por lo tanto, $\frac{dy}{y^2}=dx$, $-\frac{1}{y}=x+c_2$, $c_2=-1$, $y=\frac{1}{1-x}$.

§ 3. ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE n-ESIMO ORDEN

Se llama *ecuación diferencial lineal de n-ésimo orden* una ecuación lineal con respecto a la función desconocida y a sus derivadas, y que, por lo tanto, tiene la forma

$$a_0(x)\,y^{(n)}+a_1(x)\,y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)\,y'+a_n(x)\,y=\varphi(x). \quad (2.10)$$

Si el segundo miembro $\varphi(x)\equiv 0$, entonces la ecuación se llama *lineal homogénea*, puesto que es homogénea con respecto a la función desconocida y y a sus derivadas.

Si el coeficiente $a_0(x)$ es diferente de cero en todos los puntos de cierto segmento $a\leqslant x\leqslant b$, entonces, dividiendo entre $a_0(x)$, reducimos la ecuación lineal homogénea—si x varía en dicho segmento—a la forma:

$$y^{(n)}+p_1(x)\,y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)\,y'+p_n(x)\,y=0, \quad (2.11)$$

o bien

$$y^{(n)}=-\sum_{i=1}^{n}p_i(x)y^{(n-i)}. \quad (2.11_1)$$

Si los coeficientes $p_i(x)$ son continuos en el segmento $a\leqslant x\leqslant b$, entonces en un entorno de cualesquiera condiciones iniciales

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y'_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)},$$

donde x_0 es cualquier punto del intervalo $a<x<b$, se satisfacen las condiciones del teorema de existencia y unicidad.

En efecto, el segundo miembro de la ecuación (2.11_1) es continuo en todos sus argumentos en conjunto, y existen las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}}=-p_{n-k}(x)$ $(k=0,\ 1,\ \ldots,\ (n-1))$, de módulo acotado, puesto que las funciones $p_{n-k}(x)$ son continuas en el segmento $a\leqslant x\leqslant b$ y, por lo tanto, están acotadas en valor absoluto.

Obsérvese que la linealidad y la homogeneidad de la ecuación se conservan en cualquier transformación de la variable independiente $x=\varphi(t)$, donde $\varphi(t)$ es una función arbitraria derivable n veces, cuya derivada $\varphi'(t)\neq 0$ en el segmento de variación de t considerado.

En efecto,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{1}{\varphi'(t)},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{[\varphi'(t)]^2}-\frac{dy}{dt}\frac{\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

La derivada de cualquier orden $\frac{d^k y}{dx^k}$ es función lineal homogénea de las derivadas $\frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \ldots, \frac{d^k y}{dt^k}$ y, por lo tanto, al sustituir en la ecuación (2.11) su linealidad y su homogeneidad se conservan.

La linealidad y la homogeneidad se conservan también al efectuarse una transformación lineal homogénea de la función desconocida: $y(x)=\alpha(x)z(x)$. En efecto, por la fórmula de derivada de un producto,

$$y^{(k)}=\alpha(x)z^{(k)}+k\alpha'(x)z^{(k-1)}+\frac{k(k-1)}{2!}\alpha''(x)z^{(k-2)}+\ldots+\alpha^{(k)}(x)z,$$

es decir, la derivada $y^{(k)}$ es función lineal homogénea de $z, z', z'', \ldots, z^{(k)}$. En consecuencia, el primer miembro de la ecuación lineal homogénea

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)y=0$$

luego de sustituir las variables, será función lineal homogénea de $z, z', \ldots, z^{(n)}$.

Escribamos la ecuación lineal homogénea

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)y=0$$

en forma compacta:

$$L[y]=0,$$

donde

$$L[y]=y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)y.$$

Llamaremos a $L[y]$ *operador diferencial lineal*.

El operador diferencial lineal posee las dos propiedades fundamentales siguientes:

1) *Un factor constante puede sacarse fuera del símbolo del operador:*

$$L[cy]\equiv cL[y].$$

En efecto,

$$(cy)^{(n)}+p_1(x)(cy)^{(n-1)}+\ldots$$
$$+p_n(x)(cy)\equiv c[y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)y].$$

2) *El operador diferencial lineal, aplicado a la suma de dos funciones y_1 e y_2, es igual a la suma de los resultados de la aplicación del mismo a cada función por separado:*

$$L[y_1+y_2]\equiv L[y_1]+L[y_2].$$

En efecto,

$$(y_1+y_2)^{(n)}+p_1(x)(y_1+y_2)^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)(y_1+y_2)\equiv$$
$$\equiv[y_1^{(n)}+p_1(x)y_1^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)y_1]+[y_2^{(n)}+p_1(x)y_2^{(n-1)}+\ldots$$
$$\ldots+p_n(x)y_2].$$

Como consecuencia de las propiedades 1) y 2), resulta

$$L\left[\sum_{i=1}^{m}c_iy_i\right]\equiv\sum_{i=1}^{m}c_iL[y_i],$$

donde las c_i son constantes.

Basándonos en las propiedades del operador lineal L, demostraremos una serie de teoremas sobre las soluciones de la ecuación lineal homogénea.

Teorema 2.2. *Si y_1 es solución de la ecuación lineal homogénea $L[y]=0$, entonces cy_1, donde c es una constante arbitraria, también es solución de ésta.*

Demostración. Dado $L[y_1]\equiv 0$, hay que demostrar que $L[cy_1]\equiv 0$.

Aplicando la propiedad 1) del operador L, obtenemos:

$$L[cy_1]\equiv cL[y_1]\equiv 0.$$

Teorema 2.3. *La suma y_1+y_2 de dos soluciones y_1 e y_2 de la ecuación lineal homogénea $L[y]=0$ es solución de dicha ecuación.*

Demostración. Dados $L[y_1]\equiv 0$ y $L[y_2]\equiv 0$, hay que demostrar que $L[y_1+y_2]\equiv 0$.

Aplicando la propiedad 2) del operador L, se obtiene

$$L[y_1+y_2]\equiv L[y_1]+L[y_2]\equiv 0.$$

Corolario de los teoremas 2.2 y 2.3. *La combinación lineal con coeficientes arbitrarios constantes $\sum_{i=1}^{m}c_iy_i$ de las soluciones y_1, y_2, ..., y_m de la ecuación lineal homogénea $L[y]=0$ es solución de dicha ecuación.*

Teorema 2.4. *Si la ecuación lineal homogénea $L[y]=0$ con coeficientes reales $p_i(x)$ tiene solución compleja $y(x)=u(x)+iv(x)$, entonces la parte real $u(x)$ de esta solución y su parte imaginaria $v(x)$ son por separado soluciones de dicha ecuación homogénea.*

Demostración. Dado $L[u(x)+iv(x)]\equiv 0$, hay que demostrar que $L[u]\equiv 0$ y $L[v]\equiv 0$.

Aplicando las propiedades 1) y 2) del operador L, obtenemos

$$L[u+iv]\equiv L[u]+iL[v]\equiv 0,$$

de donde $L[u]\equiv 0$ y $L[v]\equiv 0$, puesto que una función compleja de variable real es idénticamente nula si, y sólo si, sus partes real e imaginaria son idénticamente nulas.

Observación. Hemos aplicado las propiedades 1) y 2) del operador L a la función compleja de variable real $u(x)+iv(x)$, lo cual evidentemente es lícito, ya que en la demostración de las propiedades 1) y 2) fueron aplicadas sólo las siguientes propiedades de las derivadas: $(cy)'=cy'$, donde c es una constante, e $(y_1+y_2)'=$ $=y_1'+y_2'$, las cuales son válidas también para las funciones complejas de variable real.

Las funciones $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_n(x)$ se llaman *linealmente dependientes* en cierto segmento de variación de x, $a\leqslant x\leqslant b$, si existen tales magnitudes constantes α_1, α_2, $\ldots$, α_n, que en dicho segmento

$$\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2+\ldots+\alpha_n y_n\equiv 0 \tag{2.12}$$

y además por lo menos un $\alpha_i\neq 0$. Si la identidad (2.12) se verifica sólo para $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$, las funciones y_1, y_2, $\ldots$, y_n se llaman *linealmente independientes* en el segmento $a\leqslant x\leqslant b$.

Ejemplo 1. Las funciones 1, x, x^2, $\ldots$, x^n son linealmente independientes en cualquier segmento $a\leqslant x\leqslant b$, puesto que la identidad

$$\alpha_1+\alpha_2 x+\alpha_3 x^2+\ldots+\alpha_{n+1}x^n\equiv 0 \tag{2.13}$$

es posible sólo si todos los $\alpha_i=0$. Si fuera por lo menos un $\alpha_i\neq 0$, entonces en el primer miembro de la identidad (2.13) se tendría un polinomio de grado no mayor que n, el cual puede tener no más de n raíces diferentes y, por lo tanto, se reduce a cero en no más de n puntos de dicho segmento.

Ejemplo 2. Las funciones e^{k_1x}, e^{k_2x}, $\ldots$, e^{k_nx}, donde $k_i\neq k_j$ si $i\neq j$, son linealmente independientes en cualquier segmento $a\leqslant x\leqslant b$.

Supongamos que las funciones consideradas son linealmente dependientes. Entonces

$$\alpha_1 e^{k_1x}+\alpha_2 e^{k_2x}+\ldots+\alpha_n e^{k_nx}\equiv 0, \tag{2.14}$$

donde por lo menos un $\alpha_i\neq 0$: sea, por ejemplo, $\alpha_n\neq 0$. Dividiendo la identidad (2.14) entre e^{k_1x} y derivando, se obtiene

$$\alpha_2(k_2-k_1)e^{(k_2-k_1)x}+\ldots+\alpha_n(k_n-k_1)e^{(k_n-k_1)x}\equiv 0, \tag{2.15}$$

que es una dependencia lineal entre $n-1$ funciones exponenciales de la forma e^{px} con diferentes exponentes. Dividiendo la identidad (2.15) entre $e^{(k_2-k_1)x}$ y derivando, obtenemos una dependencia lineal entre $n-2$ funciones exponenciales con diferentes exponentes. Prosiguiendo este proceso $n-1$ veces, se obtiene

$$\alpha_n(k_n-k_1)(k_n-k_2)\ldots(k_n-k_{n-1})e^{(k_n-k_{n-1})x}\equiv 0,$$

lo cual es imposible, ya que α_n, por hipótesis, es diferente de cero, y $k_i\neq k_j$ para $i\neq j$.

La demostración es válida también si los k_i son complejos.

Ejemplo 3. Las funciones

$$\begin{array}{l} e^{k_1 x},\ xe^{k_1 x},\ \ldots,\ x^{n_1} e^{k_1 x}, \\ e^{k_2 x},\ xe^{k_2 x},\ \ldots,\ x^{n_2} e^{k_2 x}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e^{k_p x},\ xe^{k_p x},\ \ldots,\ x^{n_p} e^{k_p x}, \end{array}$$

donde $k_i \neq k_j$ para $i \neq j$, son linealmente independientes en cualquier segmento $a \leqslant x \leqslant b$.

Supongamos que estas funciones son linealmente dependientes. Entonces

$$P_1(x)\, e^{k_1 x} + P_2(x)\, e^{k_2 x} + \ldots + P_p(x)\, e^{k_p x} \equiv 0, \tag{2.16}$$

donde $P_i(x)$ es un polinomio de grado no superior a n_i, y por lo menos un polinomio, por ejemplo $P_p(x)$, no es idénticamente nulo. Dividamos la identidad (2.16) entre $e^{k_1 x}$ y derivemos $n_1 + 1$ veces. Entonces el primer sumando de la identidad (2.16) desaparace, y obtenemos una dependencia lineal de la misma forma, pero con una cantidad menor de funciones:

$$Q_2(x)\, e^{(k_2 - k_1) x} + \ldots + Q_p(x)\, e^{(k_p - k_1) x} \equiv 0 \tag{2.17}$$

Además, los grados de los polinomios Q_i y P_i $(i = 2, 3, \ldots, p)$ coinciden, puesto que al derivar el producto $P_i(x)\, e^{px}$, $p \neq 0$, se obtiene $[P_i(x)\, p + P_i'(x)]\, e^{px}$, es decir, el coeficiente del término de mayor grado del polinomio $P_i(x)$, luego de derivar el producto $P_i(x)\, e^{px}$, sólo se multiplica por el factor p, diferente de cero. En particular, coinciden los grados de los polinomios $P_p(x)$ y $Q_p(x)$ y, por lo tanto, el polinomio $Q_p(x)$ no es idénticamente nulo. Dividiendo la identidad (2.17) entre $e^{(k_2 - k_1) x}$ y derivando $n_2 + 1$ veces, obtenemos una dependencia lineal con una cantidad aún menor de funciones. Repitiendo este proceso $p - 1$ veces, se obtiene

$$R_p(x)\, e^{(k_p - k_{p-1}) x} \equiv 0,$$

lo cual es imposible, puesto que el grado del polinomio $R_p(x)$ es igual al del polinomio $P_p(x)$ y, en consecuencia, $R_p(x)$ no es idénticamente nulo.

La demostración tampoco varía si las k_i son complejas.

Teorema 2.5. *Si las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son linealmente dependientes en el segmento $a \leqslant x \leqslant b$, entonces en dicho segmento el determinante*

$$W(x) = W[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \ldots & y_n'' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

llamado wronskiano), es idénticamente nulo.*

Demostración. Se da que

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n \equiv 0 \tag{2.18}$$

*) En honor al matemático polaco G. Wronsky (1775—1853).

en el segmento $a \leqslant x \leqslant b$, sin que todas las α_i sean iguales a cero. Derivando la identidad (2.18) $n-1$ veces, obtenemos

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n \equiv 0, \\ \alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2' + \ldots + \alpha_n y_n' \equiv 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)} + \alpha_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + \alpha_n y_n^{(n-1)} \equiv 0. \end{array}\right\} \qquad (2.19)$$

Este sistema de n ecuaciones lineales homogéneas con respecto a todas las α_i, tiene solución no trivial (puesto que no todas las α_i son iguales a cero) para cualquier valor de x en el segmento $a \leqslant x \leqslant b$. Por lo tanto, el determinante del sistema (2.19), que es el wronskiano $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$, es igual a cero en cada punto x del segmento $a \leqslant x \leqslant b$.

Teorema 2.6. *Si las funciones linealmente independientes $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son soluciones de la ecuación lineal homogénea*

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y = 0 \qquad (2.20)$$

con coeficientes continuos $p_i(x)$ en el segmento $a \leqslant x \leqslant b$, entonces el wronskiano

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

es diferente de cero en todos los puntos del segmento $a \leqslant x \leqslant b$.

Demostración. Supongamos que en cierto punto $x = x_0$ del segmento $a \leqslant x \leqslant b$, el wronskiano $W(x_0) = 0$. Escojamos las constantes α_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ de manera que se satisfaga el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n(x_0) = 0, \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n'(x_0) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{array}\right\} \qquad (2.21)$$

y que no todas las α_i sean iguales a cero. Esta elección es posible, ya que el determinante del sistema lineal homogéneo (2.21) de n ecuaciones con n incógnitas α_i es igual a cero, $W(x_0) = 0$ y, por lo tanto, existen soluciones no triviales de este sistema. Para tales α_i la combinación lineal

$$y = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x)$$

es solución de la ecuación lineal homogénea (2.20) que satisface,

debido a las ecuaciones del sistema (2.21), las condiciones iniciales nulas

$$y(x_0)=0, \quad y'(x_0)=0, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0)=0. \tag{2.22}$$

Estas condiciones iniciales, evidentemente, son satisfechas por la solución trivial $y \equiv 0$ de la ecuación (2.20) y, de acuerdo al teorema sobre la unicidad de la solución, a las condiciones iniciales (2.22) las satisface sólo dicha solución. Por lo tanto, $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0$ y las soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$, contrariamente a la hipótesis del teorema, son linealmente dependientes.

Observación 1. De los teoremas 2.5 y 2.6 se deduce que las soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de la ecuación (2.20), linelamente independientes en el segmento $a \leqslant x \leqslant b$, son también linealmente independientes en cualquier segmento $a_1 \leqslant x \leqslant b_1$, situado en el segmento $a \leqslant x \leqslant b$.

Observación 2. En el teorema 2.6, a diferencia del teorema 2.5, se supuso que las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ eran soluciones de la ecuación lineal homogénea (2.20) con coeficientes continuos. Renunciar a esta exigencia y considerar a $y_1, y_2, \ldots, y_n$ funciones cualesquiera que posean derivada $(n-1)$—ésima continua no es posible. Es facil citar ejemplos de funciones linealmente independientes que no son, claro está, soluciones de la ecuación (2.20) con coeficientes continuos, para las cuales el wronskiano no sólo es igual a cero en diferentes puntos, sino que incluso es idénticamente nulo. Supongamos, por ejemplo, que en el segmento $0 \leqslant x \leqslant 2$ están definidas las siguientes funciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$:

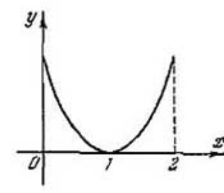


Fig. 2.1

$$y_1(x)=(x-1)^2 \quad \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1$$

e

$$y_1(x)=0 \quad \text{si } 1 < x \leqslant 2,$$

$$y_2(x)=0 \quad \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1$$

e

$$y_2(x)=(x-1)^2 \quad \text{si } 1 < x \leqslant 2$$

(fig. 2.1).

Evidentemente $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \equiv 0$, para $0 \leqslant x \leqslant 2$, puesto que en el segmento $0 \leqslant x \leqslant 1$ la segunda columna está formada por ceros, y para $1 < x \leqslant 2$ la primera columna se compondrá también de ceros. Sin embargo, las funciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son linealmente independientes en todo el segmento $0 \leqslant x \leqslant 2$, ya que considerando la identidad $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \equiv 0$, $0 \leqslant x \leqslant 2$, al principio en el seg-

mento $0 \leqslant x \leqslant 1$, llegamos a la conclusión de que $\alpha_1 = 0$, y luego, contemplando dicha identidad en el segmento $1 \leqslant x \leqslant 2$, se halla que también $\alpha_2 = 0$.

Teorema 2.7. *La combinación lineal* $y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$ *con coeficientes constantes arbitrarios de n soluciones particulares linealmente independientes* y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *en el segmento* $a \leqslant x \leqslant b$ *es solución general, para* $a \leqslant x \leqslant b$, *de la ecuación lineal homogénea*

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y = 0. \tag{2.20}$$

con coeficientes $p_i(x)$ *continuos en dicho segmento* $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Demostración. La ecuación (2.20) para $a \leqslant x \leqslant b$ satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad. Por ello, la solución $y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$, si $a \leqslant x \leqslant b$, será general, es desir, contendrá a todas las soluciones particulares sin excepción, si es posible escoger las constantes arbitrarias c_i de manera que se satisfagan las condiciones iniciales dadas arbitrariamente

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_0', \; \ldots, \; y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

donde x_0 es un punto cualquiera del segmento $a \leqslant x \leqslant b$.

Al exigir que la solución $y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$ satisfaga las condiciones iniciales impuestas, obtenemos un sistema de n ecuaciones lineales con respecto a c_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x_0) = y_0, \\ &\sum_{i=1}^{n} c_i y_i'(x_0) = y_0', \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{aligned}\right\}$$

de n incógnitas c_i, cuyo determinante es diferente de cero, puesto que dicho determinante es el wronskiano $W(x_0)$ de n soluciones linealmente independientes de la ecuación (2.20). Por lo tanto, este sistema es resoluble con respecto a c_i para cualquier x_0 del segmento $a \leqslant x \leqslant b$, y para cualesquiera segundos miembros.

Corolario del teorema 2.7. *El número máximo de soluciones linealmente independientes de una ecuación lineal homogénea es igual a su orden.*

Observación. Se llama *sistema fundamental de soluciones* de una ecuación lineal homogénea de n-ésimo orden al conjunto de

cualesquiera n soluciones particulares linealmente independientes. Para cada ecuación lineal homogénea (2.20) existe un sistema fundamental de soluciones. Para la construcción de un sistema fundamental de soluciones, se dan arbitrariamente n^2 cifras

$$y_i^{(k)}(x_0) \quad (i=1, 2, \ldots, n; \quad k=0, 1, \ldots, n-1),$$

sometiendo su elección exclusivamente a la condición

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \ldots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \ldots & y_n'(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0,$$

donde x_0 es un punto cualquiera del segmento $a \leqslant x \leqslant b$. Entonces las soluciones $y_i(x)$, determinadas por los valores iniciales $y_i^{(k)}(x_0)$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$; $i=1, 2, \ldots, n)$, forman un sistema fundamental, puesto que su wronskiano $W(x)$ en el punto $x=x_0$ es diferente de cero y, por lo tanto, en virtud del teorema 2.5 y del 2.6, las soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son linealmente independientes.

Ejemplo 4. La ecuación $y''-y=0$ tiene las evidentes soluciones particulares linealmente independientes $y_1=e^x$ e $y_2=e^{-x}$ (véase la pág. 99, ejemplo 2); por lo tanto, la solución general tiene la forma $y=c_1e^x+c_2e^{-x}$.

Ejemplo 5. La solución $y=c_1e^x+c_2\operatorname{ch}x+c_3\operatorname{sh}x$ de la ecuación $y'''-y'=0$, no es solución general, ya que las soluciones e^x, $\operatorname{ch}x$, $\operatorname{sh}x$, son linealmente dependientes. Las soluciones 1, $\operatorname{ch}x$, $\operatorname{sh}x$, son linealmente independientes y, por lo tanto,

$$y=c_1+c_2\operatorname{ch}x+c_3\operatorname{sh}x,$$

donde c_1, c_2 y c_3 son constantes arbitrarias, será solución general de la ecuación antedicha.

Conociendo una solución particular no trivial y_1 de la ecuación lineal homogénea

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)y=0 \tag{2.20}$$

se puede, por medio de la sustitución $y=y_1\int u\,dx$, reducir su orden manteniendo la linealidad y la homogeneidad.

En efecto, la sistitución $y=y_1\int u\,dx$ se puede reemplazar por dos sustituciones: $y=y_1z$ y $z'=u$. La transformación lineal homogénea

$$y=y_1z \tag{2.23}$$

conserva la linealidad y la homogeneidad de la ecuación (véase la pág. 97); por lo tanto, la ecuación (2.20) se reduce en este caso a la forma

$$a_0(x)z^{(n)}+a_1(x)z^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)z=0. \tag{2.24}$$

Además, a la solución $y=y_1$ de la ecuación (2.20) le corresponde, en virtud de (2.23), la solución $z\equiv 1$ de la ecuación (2.24). Sustituyendo $z\equiv 1$ en la ecuación (2.24), se obtiene $a_n(x)\equiv 0$. Por consiguiente, la ecuación (2.24) tiene la forma

$$a_0(x)z^{(n)}+a_1(x)z^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)z'=0,$$

y la sustitución $z'=u$ reduce su orden en una unidad:

$$a_0(x)u^{(n-1)}+a_1(x)u^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}(x)u=0.$$

Obsérvese que la misma sustitución $y=y_1\int u\,dx$, donde y_1 es solución de la ecuación $L[y]=0$, reduce en una unidad también el orden de la ecuación lineal no homogénea $L[y]=f(x)$, puesto que dicha sustitución no altera el segundo miembro de la ecuación.

Conociendo k soluciones linealmente independientes en el segmento $a\leqslant x\leqslant b$, $y_1, y_2, \ldots, y_k$ de la ecuación lineal homogénea, se puede reducir su orden hasta $n-k$, en el mismo segmento $a\leqslant x\leqslant b$.

En efecto, reduciendo en una unidad el orden de la ecuación

$$L[y]=0 \tag{2.20}$$

por medio de la sustitución $y=y_k\int u\,dx$, obtenemos nuevamente una ecuación lineal homogénea

$$a_0(x)u^{(n-1)}+a_1(x)u^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}(x)u=0 \tag{2.25}$$

de orden $n-1$. Además, conocemos $k-1$ soluciones linealmente independientes de ésta:

$$u_1=\left(\frac{y_1}{y_k}\right)', \quad u_2=\left(\frac{y_2}{y_k}\right)', \quad \ldots, \quad u_{k-1}=\left(\frac{y_{k-1}}{y_k}\right)',$$

las cuales se obtienen colocando sucesivamente $y=y_1$, $y=y_2$, ..., $y=y_{k-1}$ en $y=y_k\int u\,dx$ o bien en $u=\left(\frac{y}{y_k}\right)'$. (Obsérvese que a la solución $y=y_k$ ya utilizada para la reducción del orden de la ecuación (2.20) le corresponde la solución trivial $u\equiv 0$ de la ecuación (2.25)).

Las soluciones $u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}$ son linealmente independientes, puesto que si entre éstas existiera una dependencia lineal en el segmento $a\leqslant x\leqslant b$:

$$\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\ldots+\alpha_{k-1}u_{k-1}\equiv 0,$$

o bien

$$\alpha_1\left(\frac{y_1}{y_k}\right)'+\alpha_2\left(\frac{y_2}{y_k}\right)'+\ldots+\alpha_{k-1}\left(\frac{y_{k-1}}{y_2}\right)'\equiv 0, \tag{2.26}$$

donde por lo menos un $\alpha_i\neq 0$, entonces multiplicando por dx

e integrando la identidad (2.26) desde x_0 hasta x, donde $a \leqslant x \leqslant b$ y x_0 es un punto del segmento $[a, b]$, tendríamos

$$\alpha_1 \frac{y_1(x)}{y_k(x)} + \alpha_2 \frac{y_2(x)}{y_k(x)} + \ldots + \alpha_{k-1} \frac{y_{k-1}(x)}{y_k(x)} -$$
$$- \left[\alpha_1 \frac{y_1(x_0)}{y_k(x_0)} + \alpha_2 \frac{y_2(x_0)}{y_k(x_0)} + \ldots + \alpha_{k-1} \frac{y_{k-1}(x_0)}{y_k(x_0)}\right] \equiv 0,$$

o bien, multiplicando por $y_k(x)$ y designando

$$- \left[\alpha_1 \frac{y_1(x_0)}{y_k(x_0)} + \alpha_2 \frac{y_2(x_0)}{y_k(x_0)} + \ldots + \alpha_{k-1} \frac{y_{k-1}(x_0)}{y_k(x_0)}\right] = \alpha_k,$$

obtendríamos, contrariamente a lo supuesto al principio, una dependencia lineal entre las soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_k$:

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_k y_k \equiv 0,$$

donde al menos un $\alpha_i \neq 0$. De esta manera, utilizando una solución particular y_k, hemos reducido el orden de la ecuación en una unidad, conservando su linealidad y su homogeneidad; además, conocemos $k-1$ soluciones linealmente independientes de la ecuación transformada. Por lo tanto, por este mismo método se puede reducir el orden en otra unidad; utilizando nuevamente otra solución y continuando este proceso k veces, obtenemos una ecuación lineal de orden $n-k$.

Ejemplo 6.

$$xy'' - xy' + y = 0. \tag{2.27}$$

La ecuación tiene la solución particular evidente $y_1 = x$. Reduciendo el orden mediante la sustitución

$$y = x \int u\,dx, \quad y' = xu + \int u\,dx, \quad y'' = xu' + 2u,$$

se reduce (2.27) a la forma

$$x^2 u' + (2-x)\,xu = 0,$$

de donde

$$\frac{du}{u} = \frac{x-2}{x}\,dx, \quad u = c_1 \frac{e^x}{x^2}, \quad y = x \int u\,dx = x\left[c_1 \int \frac{e^x}{x^2}\,dx + c_2\right].$$

Lema. *Dos ecuaciones de la forma*

$$y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)\,y = 0, \tag{2.28}$$
$$y^{(n)} + q_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + q_n(x)\,y = 0, \tag{2.29}$$

donde las funciones $p_i(x)$ y $q_i(x)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) son continuas en el segmento $a \leqslant x \leqslant b$, las cuales tienen un sistema fundamental

común de soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$, coinciden, es decir, que $p_i(x) \equiv q_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ en el segmento $a \leqslant x \leqslant b$.

Domostración. Restanto (2.29) de (2.28) miembro a miembro, obtenemos la nueva ecuación:

$$[p_1(x) - q_1(x)]\, y^{(n-1)} + [p_2(x) - q_2(x)]\, y^{(n-2)} + \ldots \\ \ldots + [p_n(x) - q_n(x)]\, y = 0, \qquad (2.30)$$

cuyas soluciones son las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$, que satisfacen simultáneamente a las ecuaciones (2.28) y (2.29).

Supongamos que por lo menos uno de los coeficientes de la ecuación (2.30) $[p_i(x) - q_i(x)]$ sea diferente de cero al menos en un punto x_0 del segmento $a \leqslant x \leqslant b$. Entonces, en virtud de la continuidad de las funciones $p_i(x)$ y $q_i(x)$, este coeficiente sería diferente de cero en cierto entorno del punto x_0 y, por lo tanto, en dicho entorno las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ serían soluciones linealmente independientes de la ecuación lineal homogénea (2.30), de orden no mayor que $n-1$, lo cual contradice al corolario del teorema 2.7. Esto significa que todos los coeficientes de la ecuación (2.30)

$$p_i(x) - q_i(x) \equiv 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

es decir, $p_i(x) \equiv q_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ en el segmento $a \leqslant x \leqslant b$.

De este modo, el sistema fundamental de soluciones $y_1, y_2, \ldots$ $\ldots, y_n$ determina por completo la ecuación lineal homogénea

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)\, y = 0 \qquad (2.28)$$

y, por consiguiente, se puede plantear el problema de hallar la ecuación (2.28) que posea el sistema fundamental de soluciones

$$y_1, y_2, \ldots, y_n.$$

Como cualquier solución y de la ecuación buscada (2.28) debe ser linealmente dependiente de las soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$, entonces el wronskiano $W[y_1, y_2, \ldots, y_n, y] = 0$. Escribamos esta ecuación en forma desarrollada:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' & y' \\ y_1'' & y_2'' & \ldots & y_n'' & y'' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0,$$

o bien, descomponiéndola por los elementos de la última columna,

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n]\, y^{(n)} - \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \ldots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} y^{(n-1)} + \ldots = 0. \tag{2.31}$$

La ecuación obtenida (2.31) es la ecuación lineal homogénea buscada, que posee el sistema dado de soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ (puesto que para $y = y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $W[y_1, y_2, \ldots, y_n, y] \equiv 0$). Dividiendo ambos miembros de la ecuación (2.31) entre el coeficiente $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ de la derivada de mayor grado, diferente de cero, la reducimos a la forma (2.28).

De aquí se deduce que, en particular,

$$p_1(x) = -\frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \ldots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}}{W[y_1, y_2, \ldots, y_n]}.$$

Obsérvese que el determinante

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \ldots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} \tag{2.32}$$

es igual a la derivada del wronskiano $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$. En efecto, según la regla de derivación de un determinante, la derivada

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \ldots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

es igual a la suma sobre i desde 1 hasta n de determinantes que se diferencian del wronskiano en que en ellos se han derivado los elementos de la i-ésima fila, y las filas restantes se dejan sin variación. En esta suma solamente el último determinante, para $i = n$, que coincide con el determinante (2.32) puede ser diferente de cero. Los restantes son iguales a cero, ya que sus filas i e $i+1$ coinciden.

Por lo tanto, $p_1(x) = -\frac{W'}{W}$, de donde, multiplicando por dx e integrando, se obtiene

$$\ln|W| = -\int p_1(x)\,dx + \ln c, \qquad W = ce^{-\int p_1(x)\,dx}$$

o bien

$$W = ce^{-\int_{x_0}^{x} p_1(x)\,dx} \tag{2.33}$$

Para $x = x_0$ se obtiene $c = W(x_0)$, de donde

$$W(x) = W(x_0)\,e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(x)\,dx} \tag{2.34}$$

Las fórmulas (2.33) ó (2.34), que fueron obtenidas por primera vez por M. V. Ostrogradski e, independientemente de éste, por Liouville, se llaman *fórmulas de Ostrogradski-Liouville.*

La fórmula de Ostrogradski-Liouville (2.34) puede ser aplicada a la integración de la ecuación lineal homogénea de segundo orden

$$y'' + p_1(x)\,y' + p_2(x)\,y = 0, \tag{2.35}$$

si es conocida una solución no trivial y_1 de la misma. Según la fórmula (2.34), cualquier solución de la ecuación (2.35) debe ser también solución de la ecuación

$$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = c_1 e^{-\int p_1(x)\,dx},$$

o bien

$$y_1 y' - y y_1' = c_1 e^{-\int p_1(x)\,dx}.$$

Para integrar esta ecuación lineal de primer orden lo más fácil es aplicar el método del factor integrante.

Multiplicando por $\mu = \frac{1}{y_1^2}$, se obtiene

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right) = \frac{c_1}{y_1^2}\,e^{-\int p_1(x)\,dx},$$

de donde

$$\frac{y}{y_1} = \int \frac{c_1 e^{-\int p_1(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx + c_2,$$

o bien

$$y = c_2 y_1 + c_1 y_1 \int \frac{e^{-\int p_1(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx.$$

§ 4. ECUACIONES LINEALES HOMOGENEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES Y ECUACIONES DE EULER

1. Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes. Si en la ecuación lineal homogénea

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=0 \qquad (2.36)$$

todos los coeficientes a_i son constantes, entonces sus soluciones particulares pueden ser halladas en la forma $y=e^{kx}$, donde k es una constante. En efecto, sustituyendo en (2.36) $y=e^{kx}$ e $y^{(p)}=k^pe^{kx}$ $(p=1, 2, \ldots, n)$, tendremos:

$$a_0k^ne^{kx}+a_1k^{n-1}e^{kx}+\ldots+a_ne^{kx}=0.$$

Dividiendo entre el factor e^{kx}, diferente de cero, se obtiene la llamada *ecuación característica*

$$a_0k^n+a_1k^{n-1}+\ldots+a_{n-1}k+a_n=0. \qquad (2.37)$$

Esta ecuación de n-ésimo grado determina los valores de k para los cuales $y=e^{kx}$ es solución de la ecuación lineal homogénea inicial con coeficientes constantes (2.36). Si todas las raíces $k_1, k_2, \ldots, k_n$ de la ecuación característica son diferentes, entonces de esta forma se hallan n soluciones linealmente independientes $e^{k_1x}, e^{k_2x}, \ldots, e^{k_nx}$ de la ecuación (2.36) (véase la pág. 99, ejemplo 2). Por consiguiente,

$$y=c_1e^{k_1x}+c_2e^{k_2x}+\ldots+c_ne^{k_nx},$$

donde c_i son constantes arbitrarias, es solución general de la ecuación inicial (2.36). Este método de integración de las ecuaciones lineales con coeficientes constantes fue aplicado por primera vez por Euler.

Ejemplo 1.

$$y''-3y'+2y=0.$$

La ecuación característica tiene la forma $k^2-3k+2=0$; sus raíces son $k_1=1$, $k_2=2$. Por lo tanto, la solución general de la ecuación inicial tiene la forma $y=c_1e^x+c_2e^{2x}$.

Ejemplo 2.

$$y'''-y'=0.$$

La ecuación característica $k^3-k=0$ tiene las raíces $k_1=0$, $k_2=1$, $k_3=-1$. La solución general de dicha ecuación es $y=c_1+c_2e^x+c_3e^{-x}$.

Puesto que los coeficientes de la ecuación (2.36) se presuponen reales, las raíces complejas de la ecuación característica pueden aparecer sólo en pares conjugados. Las soluciones complejas $e^{(\alpha+\beta i)x}$ y $e^{(\alpha-\beta i)x}$, correspondientes al par de raíces complejas conjugadas

$$k_1=\alpha+\beta i \text{ y } k_2=\alpha-\beta i,$$

pueden ser sustituidas por dos soluciones reales: por las partes real e imaginaria (véase la pág. 98) de una de las soluciones.

$$e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i \operatorname{sen}\beta x),$$

o bien

$$e^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i \operatorname{sen}\beta x).$$

De esta manera, al par de raíces complejas conjugadas $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ le corresponden dos soluciones reales: $e^{\alpha x}\cos\beta x$ y $e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$.

Ejemplo 3.

$$y'' + 4y' + 5y = 0.$$

La ecuación característica tiene la forma $k^2 + 4k + 5 = 0$, y sus raíces son $k_{1,2} = -2 \pm i$. La solución general es

$$y = e^{-2x}(c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x).$$

Ejemplo 4.

$$y'' + a^2y = 0.$$

La ecuación característica $k^2 + a^2 = 0$ tiene las raices $k_{1,2} = \pm ai$. La solución general es

$$y = c_1\cos ax + c_2\operatorname{sen} ax.$$

Si entre las raíces de la ecuación característica hay raíces múltiples, entonces la cantidad de soluciones distintas del tipo e^{kx} es menor que n y, por lo tanto, las soluciones linealmente independientes que faltan deben ser buscadas en otra forma.

Demostremos que si la ecuación característica tiene la raíz k_i de multiplicidad α_i, entonces no sólo $e^{k_i x}$ será solución de la ecuación inicial, sino también $xe^{k_i x}$, $x^2e^{k_i x}$, $\ldots$, $x^{\alpha_i-1}e^{k_i x}$.

Supongamos primeramente que la ecuación característica tiene la raíz $k_i = 0$ de multiplicidad α_i. Por lo tanto, el primer miembro de la ecuación característica (2.37) tiene, en este caso, el factor común k^{α_i}, es decir, los coeficientes $a_n = a_{n-1} = \ldots = a_{n-\alpha_i+1} = 0$, y la ecuación característica tiene la forma

$$a_0k^n + a_1k^{n-1} + \ldots + a_{n-\alpha_i}k^{\alpha_i} = 0.$$

La ecuación diferencial lineal homogénea correspondiente

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-\alpha_i}y^{(\alpha_i)} = 0,$$

posee evidentemente las soluciones particulares $1, x, x^2, \ldots, x^{\alpha_i-1}$, ya que la ecuación no contiene derivadas de orden menor que α_i. De esta manera, a la raíz múltiple $k_i = 0$, de multiplicidad α_i, le corresponden α_i soluciones linealmente independientes (véase la pág. 99, ejemplo 1)

$$1, x, x^2, \ldots, x^{\alpha_i-1}.$$

Si la ecuación característica tiene una raíz $k_i \neq 0$ de multiplicidad α_i, entonces la sustitución de variables

$$y = e^{k_i x} z \tag{2.38}$$

reduce el problema al caso ya analizado de una raíz múltiple igual a cero.

En efecto, la transformación lineal homogénea de la función desconocida (2.38), como fue indicado en la pág. 97, conserva la linealidad y la homogeneidad de la ecuación. La constancia de los coeficientes en la sustitución de las variables (2.38) también se conserva, puesto que

$$y^{(p)} = (ze^{k_i x})^{(p)} = e^{k_i x}\left(z^{(p)} + pz^{(p-1)} k_i + \frac{p(p-1)}{2!} z^{(p-2)} k_i^2 + \ldots + zk_i^p\right),$$

y después de la sustitución en la ecuación (2.36) y de la división entre $e^{k_i x}$, los coeficientes de $z, z', \ldots, z^{(n)}$ que quedan son constantes.

De esta manera, la ecuación transformada será una ecuación lineal homogénea de n-ésimo orden con coeficientes constantes:

$$b_0 z^{(n)} + b_1 z^{(n-1)} + \ldots + b_n z = 0, \tag{2.39}$$

y las raíces de la ecuación característica

$$a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \tag{2.37}$$

se diferenciarán de las raíces de la ecuación característica de la ecuación transformada (2.39)

$$b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \ldots + b_n = 0 \tag{2.40}$$

en el sumando k_i, puesto que entre las soluciones $y = e^{kx}$ de la ecuación (2.36) y $z = e^{px}$ de la ecuación (2.39) deberá existir la dependencia $y = ze^{k_i x}$, o bien $e^{kx} = e^{px} e^{k_i x}$, de donde $k = p + k_i$. Por lo tanto, a la raíz $k = k_i$ de la ecuación (2.37) le corresponde la raíz $p_i = 0$ de (2.40).

No es difícil comprobar que en esta correspondencia se conserva también la multilpicidad de la raíz, es decir, que la raíz $p_i = 0$ será de multiplicidad α_i.

En efecto, la raíz múltiple k_i de la ecuación (2.37) se puede considerar como el resultado de la coincidencia de diferentes raíces de esta ecuación al variar sus coeficientes. Pero entonces, debido a la dependencia $k = p + k_i$, coincidirán también con $p = 0$ α_i raíces de la ecuación (2.40).

A la raíz $p = 0$ de multiplicidad α_i le corresponden las soluciones particulares $z = 1$, $z = x, \ldots, z = x^{\alpha_i - 1}$. Por consiguiente, a la raíz k_i de multiplicidad α_i de la ecuación (2.37) le corresponderán

las α_i soluciones particulares

$$y=e^{k_ix},\quad y=xe^{k_ix},\ \ldots,\ y=x^{\alpha_i-1}e^{k_ix} \tag{2.41}$$

debido a la dependencia $y=ze^{k_ix}$.

Queda por demostrar que las soluciones

$$e^{k_ix},\ xe^{k_ix},\ \ldots,\ x^{\alpha_i-1}e^{k_ix}\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m), \tag{2.42}$$

donde m es el número de diferentes raíces k_i de la ecuación característica, son linealmente independientes. Pero esto fue demostrado en el ejemplo 3 de la pág. 100.

Por lo tanto, la solución general de la ecuación (2.36) tiene la forma

$$y=\sum_{i=1}^{m}(c_{0i}+c_{1i}x+c_{2i}x^2+\ldots+c_{\alpha_i-1,\,i}x^{\alpha_i-1})\,e^{k_ix},$$

donde c_{si} son constantes arbitrarias.

Ejemplo 5.

$$y'''-3y''+3y'-y=0.$$

La ecuación característica $k^3-3k^2+3k-1=0$, o bien $(k-1)^3=0$, posee la raíz triple $k_{1,2,3}=1$. Por consiguiente, la solución general tiene la forma

$$y=(c_1+c_2x+c_3x^2)\,e^x.$$

Si la ecuación característica tiene una raíz múltiple compleja $p+qi$ de multiplicidad α, entonces sus soluciones correspondientes

$$e^{(p+qi)x},\ xe^{(p+qi)x},\ x^2e^{(p+qi)x},\ \ldots,\ x^{\alpha-1}e^{(p+qi)x}$$

se pueden transformar mediante las fórmulas de Euler

$$e^{(p+qi)x}=e^{px}(\cos qx+i\operatorname{sen}qx)$$

y, separando las partes real e imaginaria, obtener 2α soluciones reales:

$$\left.\begin{array}{l} e^{px}\cos qx,\ xe^{px}\cos qx,\ x^2e^{px}\cos qx,\ \ldots,\ x^{\alpha-1}e^{px}\cos qx,\\ e^{px}\operatorname{sen}qx,\ xe^{px}\operatorname{sen}qx,\ x^2e^{px}\operatorname{sen}qx,\ \ldots,\ x^{\alpha-1}e^{px}\operatorname{sen}qx. \end{array}\right\} \tag{2.43}$$

Tomando las partes reales e imaginarias de las soluciones correspondientes a la raíz conjugada $p-qi$ de la ecuación característica, no se obtienen nuevas soluciones linealmente independientes. De esta manera, al par de raíces complejas conjugadas $p\pm qi$ de multiplicidad α le corresponden 2α soluciones reales linealmente independientes (2.43).

Ejemplo 6.

$$y^{IV}+2y''+y=0.$$

La ecuación característica $k^4+2k^2+1=0$, o bien $(k^2+1)^2=0$, tiene la raíz doble $\pm i$. Por lo tanto, la solución general es de la forma

$$y=(c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\operatorname{sen} x.$$

2. Ecuaciones de Euler. Las ecuaciones de la forma

$$a_0x^{(n)}y^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}xy'+a_ny=0, \qquad (2.44)$$

donde todas las a_i son constantes, se llaman *ecuaciones de Euler*. La ecuación de Euler se reduce, mediante la sustitución de la variable independiente $x=e^t$ *), a una ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes.

En efecto, como fue señalado en la pág. 96, la linealidad y la homogeneidad de la ecuación se conservan en la transformación de la variable independiente, y los coeficientes se vuelven constantes, puesto que

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}e^{-t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d^ky}{dx^k}=e^{-kt}\left(\beta_1\frac{dy}{dt}+\beta_2\frac{d^2y}{dt^2}+\ldots+\beta_k\frac{d^ky}{dt^k}\right), \qquad (2.45)$$

donde todas las β_i son constantes, y al sustituir en la ecuación (2.44) los factores e^{-kt} se simplifican con los factores $x^k=e^{kt}$.

La validez de la igualdad (2.45) puede ser fácilmente demostrada por el método de inducción. En efecto, suponiendo que (2.45) se cumple, y derivándola nuevamente respecto a x, se demuestra la validez de (2.45) también para $\frac{d^{k+1}y}{dx^{k+1}}$:

$$\frac{d^{k+1}y}{dx^{k+1}}=e^{-(k+1)t}\left(\beta_1\frac{d^2y}{dt^2}+\beta_2\frac{d^3y}{dt^3}+\ldots+\beta_k\frac{d^{k+1}y}{dt^{k+1}}\right)-$$

$$-ke^{-(k+1)t}\left(\beta_1\frac{dy}{dt}+\beta_2\frac{d^2y}{dt^2}+\ldots+\beta_k\frac{d^ky}{dt^k}\right)=$$

$$=e^{-(k+1)t}\left(\gamma_1\frac{dy}{dt}+\gamma_2\frac{d^2y}{dt^2}+\ldots+\gamma_{k+1}\frac{d^{k+1}y}{dt^{k+1}}\right),$$

donde todas las γ_i son constantes.

De este modo, la validez de la fórmula (2.45) queda demostrada y, por lo tanto, los productos

$$x^k\frac{d^ky}{dx^k}=\beta_1\frac{dy}{dt}+\beta_2\frac{d^2y}{dt^2}+\ldots+\beta_k\frac{d^ky}{dt^k}$$

*) O bien $x=-e^t$, si $x<0$; en lo sucesivo consideraremos, para mayor determinación, que $x>0$.

que entran en forma lineal con coeficientes constantes en la ecuación de Euler

$$\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} x^k \frac{d^k y}{dx^k} = 0 \qquad (2.44')$$

se expresan en forma lineal (y con coeficientes constantes) mediante las derivadas de la función y respecto a la nueva variable t. De aquí se deduce que la ecuación transformada será una ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes:

$$b_0 \frac{d^n y}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + b_{n-1} \frac{dy}{dt} + b_n y = 0. \qquad (2.46)$$

En lugar de transformar la ecuación de Euler en una ecuación lineal con coeficientes constantes, cuyas soluciones particulares tienen la forma $y = e^{kt}$, se puede buscar directamente la solución de la ecuación inicial en la forma $y = x^k$, ya que

$$e^{kt} = x^k.$$

La ecuación obtenida después de simplificar entre x^k

$$a_0 k(k-1)\ldots(k-n+1) + a_1 k(k-1)\ldots(k-n+2) + \ldots$$
$$\ldots + a_n = 0 \qquad (2.47)$$

para la determinación de k, debe coincidir con la ecuación característica para la ecuación transformada (2.46). En consecuencia, a las raíces k_i de la ecuación (2.47), de multiplicidad α_i, le corresponden las soluciones

$$e^{k_i t}, \quad t e^{k_i t}, \quad t^2 e^{k_i t}, \quad \ldots, \quad t^{\alpha_i - 1} e^{k_i t}$$

de la ecuación transformada, o bien las

$$x^{k_i}, \quad x^{k_i} \ln x, \quad x^{k_i} \ln^2 x, \quad \ldots, \quad x^{k_i} \ln^{\alpha_i - 1} x$$

de la ecuación inicial. A las raíces complejas conjugadas $p \pm qi$ de la ecuación (2.47) de multiplicidad α le corresponden las soluciones

$$e^{pt} \cos qt, \quad te^{pt} \cos qt, \quad \ldots, \quad t^{\alpha-1} e^{pt} \cos qt,$$
$$e^{pt} \operatorname{sen} qt, \quad te^{pt} \operatorname{sen} qt, \quad \ldots, \quad t^{\alpha-1} e^{pt} \operatorname{sen} qt$$

de la ecuación transformada, o las

$$x^p \cos(q \ln x), \quad x^p \ln x \cos(q \ln x), \quad \ldots, \quad x^p \ln^{\alpha-1} x \cos(q \ln x),$$
$$x^p \operatorname{sen}(q \ln x), \quad x^p \ln x \operatorname{sen}(q \ln x), \quad \ldots, \quad x^p \ln^{\alpha-1} x \operatorname{sen}(q \ln x)$$

de la ecuación inicial de Euler.

Ejemplo 7.

$$x^2 y'' + \frac{5}{2} xy' - y = 0.$$

Buscamos la solución en la forma $y=x^k$; $k(k-1)+\frac{5}{2}k-1=0$, de donde $k_1=\frac{1}{2}$, $k_2=-2$. Por lo tanto, la solución general para $x>0$ tiene la forma

$$y=c_1x^{\frac{1}{2}}+c_2x^{-2}.$$

Ejemplo 8.

$$x^2y''-xy'+y=0.$$

Buscamos la solución en la forma $y=x^k$; $k(k-1)-k+1=0$, o bien $(k-1)^2=0$, $k_{1,2}=1$. Por consiguiente, la solución general para $x>0$ será

$$y=(c_1+c_2\ln x)\,x.$$

Ejemplo 9.

$$x^2y''+xy'+y=0.$$

Hallamos la solución en la forma $y=x^k$; $k(k-1)+k+1=0$, de donde $k_{1,2}=\pm i$. Por consiguiente, la solución general para $x>0$ tiene la forma

$$y=c_1\cos\ln x+c_2\operatorname{sen}\ln x.$$

Las ecuaciones de la forma

$$a_0(ax+b)^ny^{(n)}+a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)}+\dots$$
$$\dots+a_{n-1}(ax+b)\,y'+a_ny=0 \qquad (2.48)$$

se denominan también *ecuaciones de Euler*, y se reducen a la ecuación (2.44) por medio de la sustitución de la variable independiente $ax+b=x_1$. Por lo tanto, las soluciones particulares de esta ecuación se pueden buscar en la forma $y=(ax+b)^k$, o transformar la ecuación (2.48) a una ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes, mediante la sustitución de las variables $ax+b=e^t$ (o bien $ax+b=-e^t$, si $ax+b<0$).

§ 5. ECUACIONES LINEALES NO HOMOGENEAS

La ecuación *lineal no homogénea* tiene la forma

$$a_0(x)\,y^{(n)}+a_1(x)\,y^{(n-1)}+\dots+a_n(x)\,y=\varphi(x).$$

Si $a_0(x)\neq 0$ en el intervalo considerado de variación de x, entonces dividiendo entre $a_0(x)$ se obtiene

$$y^{(n)}+p_1(x)\,y^{(n-1)}+\dots+p_n(x)\,y=f(x). \qquad (2.49)$$

Esta ecuación, conservando las notaciones anteriores, la escribiremos en forma compacta:

$$L[y]=f(x).$$

Si para $a\leqslant x\leqslant b$, en la ecuación (2.49) todos los coeficientes $p_i(x)$ y el segundo miembro $f(x)$ son continuos, entonces ella posee

una solución única que satisface las condiciones

$$y^{(k)}(x_0)=y_0^{(k)} \quad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1),$$

donde $y_0^{(k)}$ son números reales cualesquiera, y x_0, un punto arbitrario del intervalo $a<x<b$.

En efecto, el segundo miembro de la ecuación

$$y^{(n)}=-p_1(x)\,y^{(n-1)}-p_2(x)\,y^{(n-2)}-\ldots-p_n(x)\,y+f(x) \quad (2.49_1)$$

en un entorno de los valores iniciales considerados satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad:

1) el segundo miembro es continuo en todos sus argumentos;

2) posee derivadas parciales acotadas respecto a todas las $y^{(k)}$ $(k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)$, puesto que dichas derivadas son iguales a los coeficientes $-p_{n-k}(x)$, que son, por hipótesis, continuos en $a\leqslant x\leqslant b$. Señalemos una vez más que sobre las condiciones iniciales $y_0^{(k)}$ no se establecen ningunas limitaciones.

De las dos propiedades fundamentales del operador lineal

$$L[cy]\equiv cL[y],$$
$$L[y_1+y_2]\equiv L[y_1]+L[y_2],$$

donde c es una constante, se deduce directamente que:

1) *La suma* $\tilde{y}+y_1$ *de una solución* $\tilde{y}$ *de la ecuación no homogénea*

$$L[y]=f(x) \quad (2.49)$$

y de una solución y_1 *de la ecuación homogénea correspondiente* $L[y]=0$, *es solución de la ecuación no homogénea* (2.49).

Demostración.

$$L[\tilde{y}+y_1]\equiv L[\tilde{y}]+L[y_1];$$

pero $L[\tilde{y}]\equiv f(x)$ y $L[y_1]\equiv 0$. Por consiguiente,

$$L[\tilde{y}+y_1]\equiv f(x).$$

2) *Si* y_i *es solución de la ecuación* $L[y]=f_i(x)$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$, *entonces* $y=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i y_i$ *es solución de la ecuación*

$$L[y]=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(x),$$

donde las α_i *son constantes.*

Demostración.

$$L\left[\sum_{i=1}^{m}\alpha_i y_i\right]\equiv\sum_{i=1}^{m}L[\alpha_i y_i]\equiv\sum_{i=1}^{m}\alpha_i L[y_i]; \quad (2.50)$$

pero $L[y_i] \equiv f_i(x)$. Por lo tanto,

$$L\left[\sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i\right] \equiv \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x).$$

Esta propiedad, denominada con frecuencia *principio de superposición*, conserva evidentemente su validez también para $m \to \infty$, si la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i y_i$ converge y puede ser derivada término a término n veces, puesto que en este caso es posible pasar al límite en las identidades (2.50).

3) *Si la ecuación* $L[y] = U(x) + iV(x)$, *donde todos los coeficientes* $p_i(x)$ *y las funciones* $U(x)$ *y* $V(x)$ *son reales, tiene la solución* $y = u(x) + iv(x)$, *entonces la parte real* $u(x)$ *y la parte imaginaria* $v(x)$ *son respectivamente soluciones de las ecuaciones*

$$L[y] = U(x) \quad \text{y} \quad L[y] = V(x).$$

Demostración.

$$L[u + iv] \equiv U(x) + iV(x),$$

o bien

$$L[u] + iL[v] \equiv U(x) + iV(x).$$

Por lo tanto, las partes reales $L[u] \equiv U(x)$ e imaginarias $L[v] \equiv V(x)$ son iguales por separado.

Teorema 2.8. *La solución general en el segmento* $a \leqslant x \leqslant b$ *de la ecuación* $L[y] = f(x)$ *con coeficientes* $p_i(x)$ *y con segundo miembro* $f(x)$ *continuos en dicho segmento, es igual a la suma de la solución general* $\sum_{i=1}^{n} c_i y_i$ *de la ecuación homogénea correspondiente y de cualquier solución particular* $\tilde{y}$ *de la ecuación no homogénea.*

Demostración. Hay que demostrar que

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i + \tilde{y}, \qquad (2.51)$$

donde c_i son constantes arbitrarias e y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, las soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea correspondiente, es solución general de la ecuación no homogénea $L[y] = f(x)$. Tomando en cuenta 1) (pág. 117) y la validez del teorema de existencia y unicidad para la ecuación considerada, hay que demostrar que escogiendo las constantes c_i en (2.51) se pueden satisfacer las condiciones iniciales dadas arbitrariamente

$$y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1), \qquad (2.52)$$

donde $a \leqslant x_0 \leqslant b$. Exigiendo que la solución (2.51) satisfaga las condiciones iniciales (2.52), se llega al sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x_0) + \bar{y}(x_0) = y_0, \\ &\sum_{i=1}^{n} c_i y_i'(x_0) + \bar{y}'(x_0) = y_0', \\ &\sum_{i=1}^{n} c_i y_i''(x_0) + \bar{y}''(x_0) = y_0'', \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(n-1)}(x_0) + \bar{y}^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.53)$$

Este sistema de n ecuaciones con n incógnitas, lineal con respecto a las constantes c_i, para cualesquiera segundos miembros, permite solución única con respecto a c_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, ya que el determinante del sistema (2.53) es diferente de cero para cualesquiera valores de x en el segmento $a \leqslant x \leqslant b$ y, en particular, para $x = x_0$, por ser el wronskiano $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ del sistema de soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea correspondiente.

Por lo tanto, la integración de la ecuación lineal no homogénea se reduce a hallar una solución particular de dicha ecuación y a integrar la ecuación lineal homogénea correspondiente.

Ejemplo 1.

$$y'' + y = x.$$

Una solución particular de esta ecuación $y = x$ es inmediata; la solución general de la ecuación homogénea correspondiente tiene la forma

$$y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x \text{ (véase la pág. 111, ejemplo 4).}$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación no homogénea inicial es

$$y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + x.$$

Si la elección de una solución particular de la ecuación no homogénea es difícil, pero la solución general de la ecuación homogénea correspondiente $y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$ *ya fue hallada, entonces se puede integrar la ecuación lineal no homogénea por el método de variación de las constantes.*

Al aplicar este método, la solución de la ecuación no homogénea se busca en la forma $y = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i$, o sea que en esencia, en lugar

de la función incógnita y introducimos n funciones desconocidas $c_i(x)$. Puesto que escogiendo las funciones $c_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ hay que satisfacer solamente una ecuación

$$y^{(n)}+p_1(x)\,y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)\,y=f(x), \qquad (2.49)$$

se puede exigir que estas n funciones $c_i(x)$ satisfagan otras $n-1$ ecuaciones, las cuales se escogen de manera que las derivadas de la función $y=\sum_{i=1}^{n} c_i(x)\,y_i(x)$ tengan en lo posible la misma forma que tienen cuando las c_i son constantes. Escojamos $c_i(x)$ de manera tal que la segunda suma de

$$y'=\sum_{i=1}^{n} c_i(x)\,y_i'(x)+\sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\,y_i(x)$$

sea igual a cero,

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\,y_i(x)=0$$

y, por lo tanto,

$$y'=\sum_{i=1}^{n} c_i(x)\,y_i'(x),$$

es decir, que y' tiene la misma forma que cuando las c_i son constantes. De la misma manera, en la derivada segunda

$$y''=\sum_{i=1}^{n} c_i(x)\,y_i''+\sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\,y_i'$$

exigimos que la segunda suma sea igual a cero, con lo cual se somete $c_i(x)$ a la segunda condición:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\,y_i'=0.$$

Continuamos calculando las derivadas de la función $y=\sum_{i=1}^{n} c_i(x)\,y_i$ de orden hasta $n-1$ inclusive, e igualando cada vez a cero la suma $\sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\,y_i^{(k)}(x)$:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\,y_i^{(k)}(x)=0 \quad (k=0, 1, 2, \ldots, n-2), \qquad (2.54)$$

obtenemos

$$\left.\begin{aligned} y &= \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, y_i, \\ y' &= \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, y_i', \\ y'' &= \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, y_i'', \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(n-1)} &= \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, y_i^{(n-1)}, \\ y^{(n)} &= \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, y_i^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\, y_i^{(n-1)}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.55)$$

En la última igualdad no podemos exigir que $\sum_{i=1}^{n} c_i' y_i^{(n-1)} = 0$, puesto que las funciones $c_i(x)$ ya están sometidas a las $n-1$ condiciones (2.54), y hay aún que satisfacer la ecuación inicial (2.49). Sustituyendo y, y', ..., $y^{(n)}$ de (2.55) en la ecuación

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)\, y = f(x), \qquad (2.49)$$

se obtiene la ecuación que falta para la determinación de $c_i(x)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Es evidente que en el primer miembro de (2.49) queda sólo la suma $\sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\, y_i^{(n-1)}$, ya que todos los términos restantes tienen la misma forma que cuando las c_i son constantes, y cuando éstas son constantes, la función $y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$ satisface la ecuación homogénea correspondiente.

Esto puede verificarse también mediante el cálculo directo:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i' y_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(n)} + p_1(x) \sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(n-1)} + p_2(x) \sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(n-2)} + \ldots$$
$$\ldots + p_n(x) \sum_{i=1}^{n} c_i y_i = f(x),$$

o bien

$$\sum_{i=1}^{n} c_i' y_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^{n} c_i \left[y_i^{(n)} + p_1(x)\, y_i^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)\, y_i \right] = f(x). \qquad (2.56)$$

Todas las y_i son soluciones particulares de la ecuación homogénea correspondiente; por consiguiente, $y_i^{(n)} + p_1(x)\, y_i^{(n-1)} + \ldots$ $\ldots + p_n(x)\, y_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), y la ecuación (2.56) toma la

forma

$$\sum_{i=1}^{n} c_i' y_i^{(n-1)} = f(x).$$

De esta manera, las funciones $c_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ se determinan del sistema de n ecuaciones lineales

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\, y_i = 0,\\
&\sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\, y_i' = 0,\\
&\sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\, y_i'' = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\, y_i^{(n-2)} = 0,\\
&\sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\, y_i^{(n-1)} = f(x),
\end{aligned}\right\} \qquad (2.57)$$

cuyo determinante es diferente de cero, debido a que éste

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

es el wronskiano de las soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea correspondiente. Al determinar de (2.57) todas las $c_i'(x) = \varphi_i(x)$ por cuadraturas, hallamos

$$c_i(x) = \int \varphi_i(x)\, dx + \bar{c}_i.$$

Ejemplo 2.

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}.$$

La solución general de la ecuación homogénea correspondiente tiene la forma $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$. Variemos c_1 y c_2:

$$y = c_1(x) \cos x + c_2(x) \operatorname{sen} x.$$

$c_1(x)$ y $c_2(x)$ se determinan del sistema (2.57):

$$c_1'(x) \cos x + c_2'(x) \operatorname{sen} x = 0,$$
$$-c_1'(x) \operatorname{sen} x + c_2'(x) \cos x = \frac{1}{\cos x},$$

de donde

$$c_1'(x)=\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}, \quad c_1(x)=\ln|\cos x|+\bar{c}_1;$$

$$c_2'(x)=1, \quad c_2(x)=x+\bar{c}_2$$

La solución general de la ecuación inicial es:

$$y=\bar{c}_1\cos x+\bar{c}_2 \operatorname{sen} x+\cos x\ln|\cos x|+x \operatorname{sen} x.$$

Ejemplo 3.

$$\ddot{x}+a^2x=f(t).$$

La solución general de la ecuación homogénea correspondiente tiene la forma $x=c_1\cos at+c_2 \operatorname{sen} at$. Variando las constantes: $x=c_1(t)\cos at+c_2(t)\operatorname{sen} at$, se obtiene

$$c_1'(t)\cos at+c_2'(t)\operatorname{sen} at=0,$$

$$-ac_1'(t)\operatorname{sen} at+ac_2'(t)\cos at=f(t),$$

de donde

$$c_1'(t)=-\frac{1}{a}f(t)\operatorname{sen} at, \quad c_1(t)=-\frac{1}{a}\int_0^t f(u)\operatorname{sen} au\,du+\bar{c}_1,$$

$$c_2'(t)=\frac{1}{a}f(t)\cos at, \quad c_2(t)=\frac{1}{a}\int_0^t f(u)\cos au\,du+\bar{c}_2,$$

$$x(t)=-\frac{\cos at}{a}\int_0^t f(u)\operatorname{sen} au\,du+\frac{\operatorname{sen} at}{a}\int_0^t f(u)\cos au\,du+\bar{c}_1\cos at+\bar{c}_2\operatorname{sen} at,$$

o bien

$$x(t)=\frac{1}{a}\int_0^t f(u)[\cos au \operatorname{sen} at-\operatorname{sen} au\cos at]\,du+\bar{c}_1\cos at+\bar{c}_2\operatorname{sen} at,$$

de donde, en definitiva, se obtiene

$$x(t)=\frac{1}{a}\int_0^t f(u)\operatorname{sen} a(t-u)\,du+\bar{c}_1\cos at+\bar{c}_2\operatorname{sen} at.$$

Obsérvese que el primer sumando del segundo miembro es solución particular de la ecuación inicial, que satisface las condiciones iniciales $x(0)=0$ y $\dot{x}(0)=0$.

De este modo, si se conocen n soluciones particulares linealmente independientes de la ecuación homogénea correspondiente, se puede, por el método de variación de las constantes, integrar la ecuación no homogénea

$$L[y]=f(x).$$

Si se conocen, en cambio, solamente k (donde $k<n$) soluciones linealmente independientes $y_1, y_2, \ldots, y_k$ de la ecuación homogénea

correspondiente, entonces, como ya fue señalado en la pág. 105, el cambio de variables permite reducir su orden hasta $n-k$, conservando su linealidad. Obsérvese que si $k=n-1$, el orden de la ecuación se reduce a 1, y la ecuación lineal de primer orden siempre se puede integrar en cuadraturas.

Análogamente se pueden utilizar k soluciones de la ecuación no homogénea $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_k$, puesto que sus diferencias son ya soluciones de la ecuación homogénea correspondiente. En efecto,

$$L[\tilde{y}_j] \equiv f(x), \quad L[\tilde{y}_p] \equiv f(x);$$

por lo tanto,

$$L[\tilde{y}_j-\tilde{y}_p] \equiv L[\tilde{y}_j]-L[\tilde{y}_p] \equiv f(x)-f(x) \equiv 0.$$

Si las soluciones particulares de la ecuación homogénea correspondiente

$$(\tilde{y}_1-\tilde{y}_k), \ (\tilde{y}_2-\tilde{y}_k), \ \ldots, \ (\tilde{y}_{k-1}-\tilde{y}_k) \tag{2.58}$$

son linealmente independientes, entonces el orden de la ecuación $L[y]=f(x)$ puede ser reducido hasta $n-(k-1)$. Es evidente que las otras diferencias $\tilde{y}_j-\tilde{y}_p$ son combinaciones lineales de las soluciones (2.58):

$$\tilde{y}_j-\tilde{y}_p=(\tilde{y}_j-\tilde{y}_k)-(\tilde{y}_p-\tilde{y}_k)$$

y, por consiguiente, no pueden ser utilizadas para la reducción ulterior del orden.

Señalemos otro método, el *método de Cauchy*, para hallar la solución particular de la ecuación lineal no homogénea

$$L[y(x)]=f(x). \tag{2.59}$$

En este método se supone conocida la solución $K(x, s)$, que depende de un parámetro, de la ecuación homogénea correspondiente $L[y(x)]=0$, y que satisface las condiciones

$$K(s, s)=K'(s, s)=\ldots=K^{(n-2)}(s, s)=0; \tag{2.60}$$
$$K^{(n-1)}(s, s)=1. \tag{2.61}$$

No es difícil comprobar que en este caso

$$y(x)=\int_{x_0}^{x} K(x, s) f(s)\, ds \tag{2.62}$$

será solución particular de la ecuación (2.59), que satisface las condiciones iniciales nulas

$$y(x_0)=y'(x_0)=\ldots=y^{(n-1)}(x_0)=0.$$

En efecto, derivando (2.62) y teniendo en cuenta las condiciones (2.60) y (2.61), se obtiene

$$\left.\begin{aligned} y'(x) &= \int_{x_0}^{x} K'_x(x, s) f(s)\,ds, \\ y''(x) &= \int_{x_0}^{x} K''_x(x, s) f(s)\,ds, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(n-1)}(x) &= \int_{x_0}^{x} K_x^{(n-1)}(x, s) f(s)\,ds, \\ y^{(n)}(x) &= \int_{x_0}^{x} K_x^{(n)}(x, s) f(s)\,ds + f(x). \end{aligned}\right\} \qquad (2.63)$$

Sustituyendo (2.62) y (2.63) en la ecuación (2.59), obtenemos

$$\int_{x_0}^{x} L[K(x, s)] f(s)\,ds + f(x) \equiv f(x),$$

puesto que $K(x, s)$ es solución de la ecuación homogénea correspondiente: $L[K(x, s)] \equiv 0$.

La solución $K(x, s)$ puede ser tomada de la solución general $y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)$ de la ecuación homogénea, si se escogen las constantes arbitrarias c_i de manera que se cumplan las condiciones (2.60) y (2.61).

Ejemplo 4. Para la ecuación

$$y'' + a^2 y = f(x) \qquad (2.64)$$

la solución general es $y = c_1 \cos ax + c_2 \operatorname{sen} ax$. Las condiciones (2.60) y (2.61) conducen a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} c_1 \cos as + c_2 \operatorname{sen} as &= 0, \\ -ac_1 \operatorname{sen} as + ac_2 \cos as &= 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$c_1 = -\frac{\operatorname{sen} as}{a}, \quad c_2 = \frac{\cos as}{a}$$

y la solución buscada $K(x, s)$ tiene la forma

$$K(x, s) = \frac{1}{a} \operatorname{sen} a(x - s).$$

La solución de la ecuación (2.64) que satisface las condiciones iniciales nulas,

según (2.62), se puede representar en la forma

$$y(x)=\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}\operatorname{sen} a(x-s)f(s)\,ds.$$

Para $x_0=0$, esta solución coincide con la obtenida anteriormente por el otro método (véase la pág. 123) de resolución de la misma ecuación.

Se puede dar una interpretación física de la función $K(x, s)$ y de la solución de la ecuación lineal con segundo miembro en la forma (2.62). Aquí será más cómodo designar la variable independiente por la letra t.

En muchos problemas, la solución $y(t)$ de la ecuación

$$y^{(n)}+p_1(t)y^{(n-1)}+\ldots+p_n(t)y=f(t) \tag{2.65}$$

describe el desplazamiento de cierto sistema, y la función $f(t)$ es la fuerza que actúa en este sistema; t es el tiempo.

Supongamos primeramente que, para $t<s$, el sistema se encuentra en estado de reposo, y que su desplazamiento se efectúa debido a la fuerza $f_\varepsilon(t)$, diferente de cero sólo en el intervalo $s<t<s+\varepsilon$, y cuyo impulso es igual a 1:

$$\int_{s}^{s+\varepsilon} f_\varepsilon(\tau)\,d\tau=1.$$

Designemos por $y_\varepsilon(t)$ la solución de la ecuación

$$y^{(n)}+p_1(t)y^{(n-1)}+\ldots+p_n(t)y=f_\varepsilon(t).$$

Se comprueba fácilmente la existencia del límite $y_\varepsilon(t)$ cuando $\varepsilon\to 0$, el cual no depende de la función $f_\varepsilon(t)$, si suponemos que ésta no cambia de signo. En efecto,

$$y_\varepsilon(t)=\int_{t_0}^{t} K(t, s)f_\varepsilon(s)\,ds.$$

Aplicando el teorema del valor medio para $t>s+\varepsilon$, obtenemos

$$y_\varepsilon(t)=K(t, s+\varepsilon^*)\int_{s}^{s+\varepsilon} f_\varepsilon(\tau)\,d\tau=K(t, s+\varepsilon^*),$$

donde $0<\varepsilon^*-\varepsilon$; por lo tanto,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y_\varepsilon(t)=K(t, s).$$

Por ello, es natural llamar a la función $K(t, s)$ *función de influencia* del impulso instantáneo en el momento $t=s$.

Dividiendo el intervalo (t_0, t) mediante los puntos s_i $(i = 0, 1, \ldots, m)$ en m partes iguales de longitud $\Delta s = \frac{t-t_0}{m}$, representamos la función $f(t)$ en (2.65) como suma de las funciones $f_i(t)$, donde $f_i(t)$ es diferente de cero sólo en el i—ésimo intervalo $s_{i-1} < t < s_i$. En éste $f_i(t)$ coincide con la función $f(t)$:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{m} f_i(t).$$

Debido al principio de superposición (pág. 117), la solución de la ecuación (2.65) tiene la forma

$$y(t) = \sum_{i=1}^{m} y_i(t),$$

donde y_i son soluciones de la ecuación

$$y^{(n)} + p_1(t)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_n(t)\, y = f_i(t)$$

con condiciones iniciales nulas. Si m es suficientemente grande, la solución $y_i(t)$ se puede considerar como función de influencia del impulso instantáneo de intensidad $f_i(s_i)\,\Delta s$. Por consiguiente,

$$y(t) \cong \sum_{i=1}^{m} K(t, s_i)\, f(s_i)\, \Delta s.$$

Pasando al límite cuando $m \to \infty$, se obtiene la solución de la ecuación (2.65) con condiciones iniciales nulas, en la forma

$$y = \int_{t_0}^{t} K(t, s)\, f(s)\, ds,$$

la cual demuestra que la influencia de la fuerza de acción continua se puede considerar como superposición de las influencias de impulsos separados.

§ 6. ECUACIONES LINEALES NO HOMOGENEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES Y ECUACIONES DE EULER

Al resolver ecuaciones lineales no homogéneas con coeficientes constantes, en muchos casos es posible escoger una solución particular sin dificultad, reduciéndose así el problema a la integración de la ecuación homogénea correspondiente.

Supongamos, por ejemplo, que el segundo miembro es un polinomio de grado s y que, por lo tanto, la ecuación tiene la forma

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \ldots + A_s, \quad (2.66)$$

donde todas las a_j y las A_i son constantes.

Si $a_n \neq 0$, entonces existe una solución particular de la ecuación (2.66), que tiene también la forma de polinomio de grado s. En efecto, sustituyendo

$$y = B_0x^s + B_1x^{s-1} + \ldots + B_s$$

en la ecuación (2.66) y comparando los coeficientes de iguales potencias de x en ambos miembros, se obtiene un sistema de ecuaciones lineales para la determinación de los coeficientes B_i, que es siempre resoluble si $a_n \neq 0$:

$$a_nB_0 = A_0, \quad B_0 = \frac{A_0}{a_n},$$

$$a_nB_1 + sa_{n-1}B_0 = A_1,$$

de donde se determina B_1,

$$a_nB_2 + (s-1)a_{n-1}B_1 + s(s-1)a_{n-2}B_0 = A_2,$$

de donde se determina B_2,

. . . .

$$a_nB_s + \ldots = A_s$$

de donde se determina B_s.

De esta manera, *si $a_n \neq 0$ existe una solución particular que tiene la forma de polinomio cuyo grado es igual al grado del polinomio del segundo miembro.*

Supongamos ahora que $a_n = 0$ y, para mayor generalidad, que también $a_{n-1} = a_{n-2} = \ldots = a_{n-\alpha+1} = 0$, pero $a_{n-\alpha} \neq 0$, o sea, que $k = 0$ es raíz de multiplicidad α de la ecuación característica; además, el caso $\alpha = 1$ no se excluye. Entonces, la ecuación (2.66) toma la forma

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-\alpha}y^{(\alpha)} = A_0x^s + A_1x^{s-1} + \ldots + A_s. \quad (2.67)$$

Haciendo $y^{(\alpha)} = z$, llegamos al caso anterior y, en consecuencia, hay una solución particular de la ecuación (2.67), para la cual

$$y^{(\alpha)} = B_0x^s + B_1x^{s-1} + \ldots + B_s.$$

Esto significa que y es un polinomio de grado $s+\alpha$; además, los términos de grado menor o igual a $\alpha-1$ de dicho polinomio tendrán coeficientes constantes arbitrarios, que pueden ser, en particular, escogidos iguales a cero. Entonces, la solución particular toma la forma:

$$y = x^\alpha (B_0x^s + B_1x^{s-1} + \ldots + B_s).$$

Ejemplo 1.

$$y'' + y = x^2 + x. \quad (2.68)$$

La solución particular tiene la forma

$$y = B_0x^2 + B_1x + B_2.$$

Sustituyéndola en la ecuación (2.68) e igualando los coeficientes de los términos de igual grado respecto a x, obtenemos

$$B_0=1, \quad B_1=1, \quad B_2=-2, \quad \tilde{y}=x^2+x-2.$$

La solución general es

$$y=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen} x+x^2+x-2.$$

Ejemplo 2.

$$y''+y'=x-2.$$

Se busca una solución particular de la forma

$$y=x(B_0x+B_1).$$

Sustituyendo en la ecuación e igualando los coeficientes de los términos de igual grado respecto a x en ambos miembros de la identidad obtenida, se tiene

$$B_0=\frac{1}{2}, \quad B_1=-3, \quad \tilde{y}=x\left(\frac{1}{2}x-3\right).$$

La solución general es

$$y=c_1+c_2e^{-x}+x\left(\frac{1}{2}x-3\right).$$

Consideremos ahora la ecuación lineal no homogénea de la forma

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=e^{px}(A_0x^s+A_1x^{s-1}+\ldots+A_s). \quad (2.69)$$

donde todas las a_j y las A_i son constantes. Como fue indicado anteriormente (pág. 112), el cambio de variables $y=e^{px}z$ reduce la ecuación (2.69) a la forma

$$e^{px}[b_0z^{(n)}+b_1z^{(n-1)}+\ldots+b_nz]=e^{px}(A_0x^s+A_1x^{s-1}+\ldots+A_s),$$

o bien

$$b_0z^{(n)}+b_1z^{(n-1)}+\ldots+b_nz=A_0x^s+A_1x^{s-1}+\ldots+A_s, \quad (2.70)$$

donde todas las b_j son constantes.

La solución particular de la ecuación (2.70), si $b_n\neq 0$, tiene la forma

$$\tilde{z}=B_0x^s+B_1x^{s-1}+\ldots+B_s;$$

por lo tanto, la solución particular de la ecuación (2.69) será

$$\tilde{y}=e^{px}(B_0x^s+B_1x^{s-1}+\ldots+B_s).$$

La condición $b_n\neq 0$ significa que $\bar{k}=0$ no es raíz de la ecuación característica

$$b_0\bar{k}^n+b_1\bar{k}^{n-1}+\ldots+b_n=0. \quad (2.71)$$

Por consiguiente, $k=p$ no es raíz de la ecuación característica

$$a_0k^n+a_1k^{n-1}+\ldots+a_n=0, \quad (2.72)$$

puesto que las raíces de estas ecuaciones están ligadas por la dependencia $k=\bar{k}+p$ (véase la pág. 112).

Si $k=0$, en cambio, es raíz de multiplicidad α de la ecuación característica (2.71) o, en otras palabras, $k=p$ es raíz de la misma multiplicidad α de la ecuación característica (2.72), entonces las soluciones particulares de las ecuaciones (2.70) y (2.69) tiene respectivamente las formas

$$\tilde{z}=x^{\alpha}(B_0x^s+B_1x^{s-1}+\ldots+B_s),$$
$$\tilde{y}=x^{\alpha}e^{px}(B_0x^s+B_1x^{s-1}+\ldots+B_s).$$

De esta manera, *si el segundo miembro de la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes tiene la forma*

$$e^{px}(A_0x^s+A_1x^{s-1}+\ldots+A_s)$$

y si p no es raíz de la ecuación característica, la solución particular debe buscarse en la misma forma:

$$\tilde{y}=e^{px}(B_0x^s+B_1x^{s-1}+\ldots+B_s).$$

Si, en cambio, p es raíz de multiplicidad α de la ecuación característica (este caso se denomina singular o resonante), la solución particular debe ser buscada en la forma

$$\tilde{y}=x^{\alpha}e^{px}(B_0x^s+B_1x^{s-1}+\ldots+B_s).$$

Ejemplo 3.

$$y''+9y=e^{3x}.$$

La solución particular debe buscarse en la forma

$$\tilde{y}=Be^{3x}.$$

Ejemplo 4.

$$y''+y=e^{3x}(x-2).$$

La solución particular debe ser buscada en la forma

$$\tilde{y}=e^{3x}(B_0x+B_1).$$

Ejemplo 5.

$$y''-y=e^{x}(x^2-1).$$

La solución particular debe buscarse en la forma

$$\tilde{y}=xe^{x}(B_0x^2+B_1x+B_2),$$

ya que $k=1$ es una raíz simple de la ecuación característica.

Ejemplo 6.

$$y'''+3y''+3y'+y=e^{-x}(x-5).$$

La solución particular debe ser buscada en la forma

$$\tilde{y}=x^3e^{-x}(B_0x+B_1),$$

debido a que $k=-1$ es una raíz triple de la ecuación característica.

Obsérvese que nuestros razonamientos son válidos también si las p son complejas; por eso, si el segundo miembro de la ecuación diferencial lineal tiene la forma

$$e^{px}[P_s(x)\cos qx + Q_s(x)\,\text{sen}\,qx], \tag{2.73}$$

donde uno de los polinomios $P_s(x)$ ó $Q_s(x)$ tiene grado s y el otro, no mayor que s, entonces, reduciendo según las fórmulas de Euler las funciones trigonométricas a la forma exponencial, obtenemos en el segundo miembro

$$e^{(p+qi)x}R_s(x) + e^{(p-qi)x}T_s(x) \tag{2.74}$$

donde $R_s(x)$ y $T_s(x)$ son polinomios de grado s.

A cada sumando del segundo miembro se le puede aplicar la regla anteriormente indicada, es decir, si $p \pm qi$ no son raíces de la ecuación característica, la solución particular se puede buscar en la misma forma que el segundo miembro (2.74); si, en cambio, $p \pm qi$ son raíces de multiplicidad α de la ecuación característica, la solución particular debe multiplicarse además por x^α.

Si volvemos a las funciones trigonométricas, esta regla se puede formular así:

a) *Si $p \pm qi$ no son raíces de la ecuación característica, la solución particular debe buscarse en la forma*

$$\tilde{y} = e^{px}[\bar{P}_s(x)\cos qx + \bar{Q}_s(x)\,\text{sen}\,qx],$$

donde $\bar{P}_s(x)$ y $\bar{Q}_s(x)$ son polinomios de grado s con coeficientes indeterminados.

Obsérvese que si uno de los *polinomios* $P_s(x)$ ó $Q_s(x)$ tiene un grado menor que s, e incluso, en particular, es idénticamente nulo, de todos modos ambos *polinomios* $\overline{P_s}(x)$ y $\overline{Q_s}(x)$ tendrán, en general, grado s.

b) *Si $p \pm qi$ son raíces de multiplicidad α de la ecuación característica (caso de resonancia), la solución particular debe ser buscada en la forma*

$$\tilde{y} = x^\alpha e^{px}[\overline{P_s}(x)\cos qx + \overline{Q_s}(x)\,\text{sen}\,qx].$$

Ejemplo 7.

$$y'' + 4y' + 4y = \cos 2x.$$

Como los números $\pm 2i$ no son raíces de la ecuación característica, buscamos la solución particular en la forma

$$\tilde{y} = A\cos 2x + B\,\text{sen}\,2x.$$

Ejemplo 8.

$$y'' + 4y = \cos 2x.$$

Como los números $\pm 2i$ son raíces simples de la ecuación característica, buscamos

la solución particular en la forma

$$\tilde{y}=x[A\cos 2x+B\operatorname{sen} 2x].$$

Ejemplo 9.

$$y^{IV}+2y''+y=\operatorname{sen} x.$$

Puesto que los números $\pm i$ son raíces dobles de la ecuación característica, la solución particular se busca en la forma

$$\tilde{y}=x^2(A\cos x+B\operatorname{sen} x).$$

Ejemplo 10.

$$y''+2y'+2y=e^{-x}(x\cos x+3\operatorname{sen} x).$$

Debido a que los números $-1\pm i$ son raíces simples de la ecuación característica, la solución particular debe buscarse en la forma

$$\tilde{y}=xe^{-x}[(A_0x+A_1)\cos x+(B_0x+B_1)\operatorname{sen} x].$$

En muchos casos, al buscar soluciones particulares de ecuaciones lineales con coeficientes constantes con segundos miembros de la forma (2.73), es conveniente pasar a las funciones exponenciales.

Por ejemplo, en la ecuación

$$y''-2y'+y=\cos x$$

se puede transformar $\cos x$ por la fórmula de Euler, o aún de modo más sencillo, considerar la ecuación

$$y''-2y'+y=e^{ix}, \tag{2.75}$$

la parte real de cuya solución debe satisfacer la ecuación original (véase la pág. 118).

La solución particular de la ecuación (2.75) se puede buscar en la forma

$$y=Ae^{ix}.$$

Entonces

$$A=\frac{i}{2},\quad y=\frac{i}{2}(\cos x+i\operatorname{sen} x).$$

La solución particular de la ecuación original es

$$\bar{y}_1=\operatorname{Re} y=-\frac{1}{2}\operatorname{sen} x.$$

En muchos casos resulta muy cómodo el método operacional para la búsqueda de soluciones particulares de ecuaciones lineales no homogéneas con coeficientes constantes.

Concepto sobre el método operacional para la resolución de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Introduzcamos la notación

$$\frac{d^ky}{dx^k}=D^ky$$

para las derivadas de orden k. Utilizando esta notación, escribamos la ecuación

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=f(x)$$

en la forma

$$a_0 D^n y + a_1 D^{n-1} y + \dots + a_n y = f(x),$$

o bien

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n)\, y = f(x). \qquad (2.76)$$

La expresión

$$a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n$$

se llama *polinomio operacional*. Este polinomio se designará brevemente por $F(D)$, quedando la ecuación (2.76) en la forma

$$F(D)\, y = f(x).$$

Es fácil establecer por comprobación directa la validez de las identidades siguientes:

1) $F(D)\, e^{kx} \equiv e^{kx} F(k)$,
2) $F(D^2) \operatorname{sen} ax \equiv \operatorname{sen} ax\, F(-a^2)$,
3) $F(D^2) \cos ax \equiv \cos ax\, F(-a^2)$,
4) $F(D)\, e^{kx} v(x) \equiv e^{kx} F(D+k)\, v(x)$.

En efecto:

1) $F(D)\, e^{kx} = (a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_n)\, e^{kx} =$

$$= e^{kx} (a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_n) = e^{kx} F(k).$$

2) $F(D^2) \operatorname{sen} ax = (a_0 D^{2n} + a_1 D^{2n-2} + \dots + a_{n-1} D^2 + a_n) \operatorname{sen} ax =$

$$= [a_0 (-a^2)^n + a_1 (-a^2)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(-a^2) + a_n] \operatorname{sen} ax =$$

$$= \operatorname{sen} ax\, F(-a^2).$$

La identidad 3) se demuestra en forma completamente análoga:

$$F(D^2) \cos ax = \cos ax\, F(-a^2).$$

4) $F(D)\, e^{kx} v(x) = \sum_{p=0}^{n} a_{n-p} D^p (e^{kx} v(x)) =$

$$= e^{kx} \sum_{p=0}^{n} a_{n-p} \left[k^p v(x) + p k^{p-1} Dv + \frac{p(p-1)}{2!} k^{p-2} D^2 v + \dots + D^p v \right] =$$

$$= e^{kx} \sum_{p=0}^{n} a_{n-p} (D+k)^p v = e^{kx} F(D+k)\, v(x).$$

Se llama suma de dos operadores $F_1(D)$ y $F_2(D)$ al operador $[F_1(D) + F_2(D)]$, cuya aplicación a cierta función $f(x)$ se determina por la igualdad

$$[F_1(D) + F_2(D)]\, f(x) = F_1(D)\, f(x) + F_2(D)\, f(x).$$

De esta definición se deduce que

$$\sum_{p=0}^{n} a_{n-p}D^p + \sum_{p=0}^{n} b_{n-p}D^p = \sum_{p=0}^{n} (a_{n-p} + b_{n-p}) D^p,$$

puesto que al aplicar ambos miembros de esta igualdad a cierta función $f(x)$, derivable n veces, se llega a un mismo resultado; es decir, la regla de la adición de polinomios operacionales no se diferencia de la regla de adición de polinomios ordinarios (no operacionales).

Se llama producto de dos operadores $F_1(D)\cdot F_2(D)$ al operador cuya aplicación a cierta función $f(x)$, derivable un número suficiente de veces, se determina por la igualdad

$$F_1(D)\cdot F_2(D) f(x) = F_1(D)[F_2(D) f(x)],$$

o sea, que a la función $f(x)$ se la aplica primero el segundo factor, y luego a este resultado se le aplica el primer factor.

Partiendo de esta definición no es difícil comprobar que la regla del producto de polinomios operacionales no se diferencia de la regla del producto de polinomios ordinarios (no operacionales). En efecto,

$$\sum_{p=0}^{n} a_{n-p}D^p \sum_{q=0}^{m} b_{m-q}D^q = \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{m} a_{n-p}b_{m-q}D^{p+q}, \qquad (2.77)$$

puesto que

$$\sum_{p=0}^{n} a_{n-p}D^p \sum_{q=0}^{m} b_{m-q}D^q f(x) =$$
$$= \sum_{p=0}^{n} a_{n-p}D^p \left[\sum_{q=0}^{m} b_{m-q}f^{(q)}(x)\right] = \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{m} a_{n-p}b_{m-q}f^{(p+q)}(x),$$

lo cual coincide con el resultado de aplicar el operador

$$\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{m} a_{n-p}b_{m-q}D^{p+q}$$

a $f(x)$.

De (2.77) se deduce, en particular, la conmutatividad del producto de operadores:

$$F_1(D)F_2(D) = F_2(D)F_1(D).$$

La validez de la ley distributiva

$$F(D)[F_1(D) + F_2(D)] = F(D)F_1(D) + F(D)F_2(D)$$

se deduce de inmediato de la regla de derivación de una suma. Por lo tanto, las operaciones de suma y de producto de polinomios

operacionales no se diferencian de las mismas operaciones con polinomios ordinarios (no operacionales).

Definamos ahora el operador $\frac{1}{F(D)}$.

El resultado de aplicar el operador $\frac{1}{F(D)}$ a cierta función continua $f(x)$ es la solución de la ecuación

$$F(D)\,y=f(x), \tag{2.78}$$

$$y=\frac{1}{F(D)}f(x).$$

Por consiguiente,

$$F(D)\left[\frac{1}{F(D)}f(x)\right]\equiv f(x). \tag{2.79}$$

Se hubiera podido considerar que $\frac{1}{F(D)}f(x)$ es la solución de la ecuación (2.78), determinada por ciertas condiciones iniciales concretas, por ejemplo, nulas. Para nuestros fines, sin embargo, es más cómodo considerar que $\frac{1}{F(D)}f(x)$ es una de las soluciones (no importa cuál) de la ecuación (2.78). Por lo tanto, el resultado de aplicar el operador $\frac{1}{F(D)}$ a cierta función $f(x)$ está determinado solamente con exactitud de un sumando igual a una solución de la ecuación homogénea correspondiente.

Comprendiendo así el resultado de la aplicación del operador $\frac{1}{F(D)}$, se verificará la igualdad

$$\frac{1}{F(D)}[F(D)\,f(x)]=f(x), \tag{2.80}$$

puesto que $f(x)$ es evidentemente solución de la ecuación

$$F(D)\,y=F(D)\,f(x).$$

El producto de los operadores $\Phi(D)$ y $\frac{1}{F(D)}$ se determina mediante la igualdad

$$\Phi(D)\frac{1}{F(D)}f(x)=\Phi(D)\left[\frac{1}{F(D)}f(x)\right].$$

Análogamente,

$$\frac{1}{F(D)}\Phi(D)\,f(x)=\frac{1}{F(D)}[\Phi(D)\,f(x)].$$

Por eso, en las fórmulas (2.79) y (2.80) se puede prescindir de los paréntesis; obsérvese, además, que

$$\frac{1}{D^p}f(x)=\int\int\ldots\int f(x)\,dx^p,$$

ya que $\frac{1}{D^p} f(x)$ es, por definición del operador $\frac{1}{F(D)}$, solución de la ecuación $D^p y = f(x)$.

Comprobemos las siguientes propiedades del operador $\frac{1}{F(D)}$:

1) $\frac{1}{F(D)} kf(x) = k \frac{1}{F(D)} f(x)$,

donde k es un factor constante, puesto que

$$F(D)\, k \frac{1}{F(D)} f(x) = kF(D) \frac{1}{F(D)} f(x) = kf(x).$$

2) $\frac{1}{F(D)} e^{kx} = \frac{e^{kx}}{F(k)}$, si $F(k) \neq 0$.

En efecto, $\frac{e^{kx}}{F(k)}$ es solución de la ecuación $F(D)\, y = e^{kx}$, ya que, según la fórmula 1), pág. 133

$$F(D) \frac{e^{kx}}{F(k)} \equiv \frac{F(k)\, e^{kx}}{F(k)} \equiv e^{kx}.$$

3) $\frac{1}{F(D^2)} \operatorname{sen} ax = \frac{\operatorname{sen} ax}{F(-a^2)}$, si $F(-a^2) \neq 0$.

Efectivamente, $\frac{\operatorname{sen} ax}{F(-a^2)}$ es solución de la ecuación $F(D^2)\, y = \operatorname{sen} ax$ puesto que, en virtud de la fórmula 2), pág. 133,

$$F(D^2) \frac{\operatorname{sen} ax}{F(-a^2)} \equiv \frac{1}{F(-a^2)} F(-a^2) \operatorname{sen} ax \equiv \operatorname{sen} ax.$$

4) $\frac{1}{F(D^2)} \cos ax = \frac{\cos ax}{F(-a^2)}$, si $F(-a^2) \neq 0$,

debido a que, según la fórmula 3) de la pág. 133,

$$F(D^2) \frac{\cos ax}{F(-a^2)} \equiv \frac{1}{F(-a^2)} F(-a^2) \cos ax \equiv \cos ax.$$

5) $\frac{1}{F(D)} e^{kx} v(x) = e^{kx} \frac{1}{F(D+k)} v(x)$.

En efecto, $e^{kx} \frac{1}{F(D+k)} v(x)$ es solución de la ecuación $F(D)\, y = e^{kx} v(x)$, ya que, en virtud de la fórmula 4), pág. 133,

$$F(D)\, e^{kx} \frac{1}{F(D+k)} v(x) \equiv e^{kx} F(D+k) \frac{1}{F(D+k)} v(x) \equiv e^{kx} v(x).$$

6) $\frac{1}{F(D)} [f_1(x) + f_2(x)] = \frac{1}{F(D)} f_1(x) + \frac{1}{F(D)} f_2(x)$.

Esta igualdad es consecuencia del principio de superposición (pág. 117).

7) $\frac{1}{F_1(D) \cdot F_2(D)} f(x) = \frac{1}{F_1(D)} \frac{1}{F_2(D)} f(x)$,

o sea

$$y = \frac{1}{F_1(D)} \left[\frac{1}{F_2(D)} f(x) \right] \tag{2.81}$$

es solución de la ecuación

$$F_1(D) F_2(D) y = f(x). \tag{2.82}$$

En efecto, sustituyendo (2.81) en (2.82), se obtiene

$$F_2(D) F_1(D) \frac{1}{F_1(D)} \left[\frac{1}{F_2(D)} f(x) \right] \equiv F_2(D) \frac{1}{F_2(D)} f(x) \equiv f(x).$$

Veamos algunos ejemplos sobre la búsqueda de soluciones particulares de ecuaciones lineales no homogéneas con coeficientes constantes mediante el método operacional:

1) $y'' + 4y = e^x$, o bien $(D^2 + 4) y = e^x$, de donde

$$y = \frac{1}{D^2 + 4} e^x = \frac{e^x}{5}.$$

2) $y^{IV} + y = 2 \cos 3x$, o bien $(D^4 + 1) y = 2 \cos 3x$,

$$y = \frac{1}{D^4 + 1} 2 \cos 3x = \frac{2 \cos 3x}{(-9)^2 + 1} = \frac{1}{41} \cos 3x.$$

3) $y'' + 9y = 5 \operatorname{sen} x$, $(D^2 + 9) y = 5 \operatorname{sen} x$,

$$y = \frac{1}{D^2 + 9} 5 \operatorname{sen} x = \frac{5 \operatorname{sen} x}{-1 + 9} = \frac{5}{8} \operatorname{sen} x.$$

4) $y'' - 4y' + 4y = x^2 e^{2x}$, $(D - 2)^2 y = x^2 e^{2x}$,

$$y = \frac{1}{(D-2)^2} e^{2x} x^2 = e^{2x} \frac{1}{D^2} x^2 = e^{2x} \frac{x^4}{12}.$$

5) $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x$, $(D - 1)^3 y = e^x$,

$$y = \frac{1}{(D-1)^3} e^x,$$

$F(k) = 0$; por ello, en lugar de la segunda fórmula, se aplica la fórmula 5 (pág. 136), considerando a e^x como producto de $e^x \cdot 1$:

$$y = \frac{1}{(D-1)^3} e^x \cdot 1 = e^x \frac{1}{D^3} 1 = e^x \frac{x^3}{6}.$$

6) $y''' - y = \operatorname{sen} x$,

$$(D^3 - 1) y = \operatorname{sen} x, \tag{2.83}$$

$y = \frac{1}{D^3 - 1} \operatorname{sen} x$. Como el operador contiene potencias impares de D, entonces no es posible aplicar la fórmula 4). Por ello, en lugar de la ecuación original consideremos la ecuación $(D^3 - 1) y = e^{ix}$, o bien

$$(D^3 - 1) y = \cos x + i \operatorname{sen} x. \tag{2.84}$$

La parte imaginaria de la solución de la ecuación (2.84) será solución de la

ecuación original (véase la pág. 118):

$$y=\frac{1}{D^3-1}e^{ix}=\frac{e^{ix}}{i^3-1}=\frac{-e^{ix}}{1+i}=\frac{(-1+i)(\cos x+i\,\mathrm{sen}\,x)}{2}=$$
$$=-\frac{1}{2}(\cos x+\mathrm{sen}\,x)+\frac{i}{2}(\cos x-\mathrm{sen}\,x).$$

La parte imaginaria $\frac{\cos x-\mathrm{sen}\,x}{2}$ de la solución de la ecuación (2.84) es solución de la ecuación (2.83).

7) $y''+y=\cos x$, $(D^2+1)\,y=\cos x$, $y=\frac{1}{D^2+1}\cos x$.

La fórmula 3) de la pág. 136 es inaplicable, puesto que $F(-a^2)=0$. Por eso, nuevamente en lugar de la ecuación original consideraremos la ecuación

$$y''+y=e^{ix}, \text{ o bien } y''+y=\cos x+i\,\mathrm{sen}\,x,$$

y tomaremos la parte real de su solución

$$(D^2+1)\,y=e^{ix},\quad y=\frac{1}{D^2+1}e^{ix}=\frac{1}{D-i}\cdot\frac{1}{D+i}e^{ix}=\frac{1}{D-i}\,\frac{e^{ix}}{2i}=$$
$$=\frac{e^{ix}}{2i}\,\frac{1}{D}\cdot 1=\frac{e^{ix}x}{2i}=\frac{x(\cos x+i\,\mathrm{sen}\,x)}{2i}.$$

Tomando la parte real $\frac{x\,\mathrm{sen}\,x}{2}$ de la solución hallada de la ecuación auxiliar, se obtiene la solución de la ecuación original.

8) $y^{\mathrm{IV}}-y=e^x$, $(D^4-1)\,y=e^x$, $y=\frac{1}{D^4-1}e^x=$

$$=\frac{1}{D-1}\,\frac{1}{(D+1)(D^2+1)}e^x=\frac{1}{D-1}\,\frac{e^x}{4}=\frac{1}{4}e^x\frac{1}{D}\,1=\frac{xe^x}{4}.$$

Analicemos además cómo actúa el operador $\frac{1}{F(D)}$ sobre el polinomio

$$P_p(x)=A_0x^p+A_1x^{p-1}+\ldots+A_p.$$

Dividamos formalmente 1 entre el polinomio

$$F(D)=a_n+a_{n-1}D+\ldots+a_0D^n,\quad a_n\neq 0,$$

dispuesto en orden creciente de las potencias de D, por la regla de división de polinomios ordinarios (no operacionales). Detendremos la división al obtener en el cociente un polinomio operacional de grado p:

$$b_0+b_1D+\ldots+b_pD^p=Q_p(D).$$

Entonces en el resto tendremos el polinomio

$$R(D)=c_{p+1}D^{p+1}+c_{p+2}D^{p+2}+\ldots+c_{p+n}D^{p+n},$$

que contiene al operador D en potencias no menores de $p+1$.

Debido a la dependencia entre dividendo, divisor, cociente y resto, se obtiene

$$F(D)\,Q_p(D)+R(D)\equiv 1. \tag{2.85}$$

Esta identidad se cumple para los polinomios ordinarios (no operacionales), pero como las reglas de suma y producto de polinomios operacionales no se diferencian de las de suma y producto de polinomios ordinarios, la identidad se cumple también para los polinomios operacionales. Aplicando ambos miembros de la identidad (2.85) al polinomio $A_0x^p+A_1x^{p-1}+\ldots+A_p$, se obtiene

$$[F(D)\,Q_p(D)+R(D)](A_0x^p+A_1x^{p-1}+\ldots+A_p)\equiv$$
$$\equiv A_0x^p+A_1x^{p-1}+\ldots+A_p$$

o, tomando en cuenta que

$$R(D)(A_0x^p+A_1x^{p-1}+\ldots+A_p)\equiv 0,$$

debido a que $R(D)$ contiene a D en potencias no menores de $p+1$, tendremos

$$F(D)\,[Q_p(D)(A_0x^p+A_1x^{p-1}+\ldots+A_p)]\equiv$$
$$\equiv A_0x^p+A_1x^{p-1}+\ldots+A_p,$$

es decir, $Q_p(D)(A_0x^p+A_1x^{p-1}+\ldots+A_p)$ es solución de la ecuación

$$F(D)y=A_0x^p+A_1x^{p-1}+\ldots+A_p.$$

De este modo,

$$\frac{1}{F(D)}(A_0x^p+A_1x^{p-1}+\ldots+A_p)=Q_p(D)(A_0x^p+A_1x^{p-1}+\ldots+A_p).$$

Por ejemplo:

9) $y''+y=x^2-x+2$, $(D^2+1)\,y=x^2-x+2$, $y=\frac{1}{D^2+1}(x^2-x+2)$.

Dividiendo 1 entre $1+D^2$, obtenemos $Q_2(D)=1-D^2$. Por lo tanto,

$$y=(1-D^2)(x^2-x+2)=x^2-x.$$

10) $y''+2y'+2y=x^2e^{-x}$, $(D^2+2D+2)\,y=x^2e^{-x}$,

$$y=\frac{1}{D^2+2D+2}x^2e^{-x}=e^{-x}\frac{1}{D^2+1}x^2=e^{-x}(1-D^2)\,x^2=e^{-x}(x^2-2).$$

11) $y''+y=x\cos x$, $(D^2+1)\,y=x\cos x$.

Pasamos a la ecuación $(D^2+1)\,y=xe^{ix}$ y luego tomamos la parte real de la solución

$$y=\frac{1}{D^2+1}xe^{ix}=e^{ix}\frac{1}{D(D+2i)}x=e^{ix}\frac{1}{D}\left(\frac{1}{2i}+\frac{D}{4}\right)x=$$
$$=e^{ix}\frac{1}{D}\left(\frac{x}{2i}+\frac{1}{4}\right)=e^{ix}\left(\frac{x^2}{4i}+\frac{x}{4}\right)=(\cos x+i\operatorname{sen} x)\left(\frac{x^2}{4i}+\frac{x}{4}\right).$$

Tomando la parte real $\frac{x^2}{4}\operatorname{sen} x+\frac{x}{4}\cos x$, se obtiene la solución buscada.

Observación. El último ejemplo demuestra cómo hay que aplicar el operador $\frac{1}{F(D)}$ a un polinomio, si $a_n=0$. Representando $F(D)$ en la forma $D^s\Phi(D)$, donde el término independiente del polinomio $\Phi(D)$ ya no es igual a cero, se aplica al polinomio primero el operador $\frac{1}{\Phi(D)}$, y después el operador $\frac{1}{D^s}$.

Las *ecuaciones no homogéneas de Euler*

$$a_0x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=f(x), \tag{2.86}$$

o bien

$$a_0(ax+b)^ny^{(n)}+a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=f(x) \tag{2.87}$$

se pueden integrar mediante la resolución de las ecuaciones homogéneas correspondientes (véase la pág. 114) y hallando una solución particular de la ecuación no homogénea, o bien aplicando el método de variación de las constantes. Sin embargo, generalmente es más simple integrar primero la ecuación homogénea, y para elegir la solución particular transformar la ecuación de Euler (2.86), mediante la sustitución de variables $x=\pm e^t$ (para la ecuación (2.87), $ax+b=\pm e^t$), en una ecuación con coeficientes constantes, para las cuales los métodos de búsqueda de soluciones particulares han sido desarrollados en forma detallada.

Ejemplo 11.

$$x^2y''(x)-xy'(x)+y(x)=x\ln^3 x. \tag{2.88}$$

Buscamos la solución de la ecuación homogénea correspondiente en la forma $y=x^k$:

$$k^2-2k+1=0; \tag{2.89}$$

$k_{1,2}=1$; por lo tanto, la solución general de la ecuación homogénea tiene la forma $y=(c_1+c_2\ln x)x$. Por la sustitución de variables $x=e^t$, transformamos la ecuación (2.88) en una ecuación con coeficientes constantes: $\ddot{y}(t)-2\dot{y}(t)+y=t^3e^t$ (el primer miembro de esta ecuación puede ser escrito directamente a partir de la ecuación característica (2.89)). Mediante el método operacional, se halla fácilmente la solución particular de la ecuación transformada

$$y=\frac{1}{(D-1)^2}e^tt^3=e^t\frac{1}{D^2}t^3=\frac{e^tt^5}{20}, \quad y=\frac{x\ln^5 x}{20}.$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación (2.88) tiene la forma

$$y=\left(c_1+c_2\ln x+\frac{\ln^5 x}{20}\right)x.$$

§ 7. INTEGRACION DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES POR MEDIO DE SERIES

El problema de la integración de ecuaciones lineales homogéneas de n-ésimo orden

$$p_0(x)y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)y=0, \tag{2.90}$$

se reduce a elegir n, o por lo menos $n-1$ soluciones linealmente independientes. Sin embargo, las soluciones particulares se escogen con facilidad sólo en casos excepcionales. En casos más complejos las soluciones particulares son buscadas en forma de suma de una serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i\varphi_i(x)$, sobre todo en forma de suma de una serie de potencias o de una serie generalizada de potencias.

Las condiciones bajo las cuales existen soluciones en forma de suma de una serie de potencias o de una serie generalizada de potencias, se establecen comúnmente por métodos de la teoría de funciones de variable compleja, la cual suponemos desconocida por el lector; por esto, los teoremas fundamentales de este parágrafo están dados sin demostración, aplicados a las ecuaciones de segundo orden, las cuales se encuentran con mayor frecuencia en la práctica.

Teorema 2.9. (sobre la propiedad analítica de la solución). *Si $p_0(x)$, $p_1(x)$ y $p_2(x)$ son funciones analíticas de x en un entorno del punto $x=x_0$ y $p_0(x_0)\neq 0$, entonces las soluciones de la ecuación*

$$p_0(x)\,y''+p_1(x)\,y'+p_2(x)\,y=0 \qquad (2.91)$$

son también funciones analíticas en cierto entorno del mismo punto; por lo tanto, la solución de la ecuación (2.91) se puede buscar en la forma

$$y=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots$$

Teorema 2.10. (sobre el desarrollo de la solución en una serie generalizada de potencias). *Si la ecuación (2.91) satisface las condiciones del teorema anterior, pero $x=x_0$ es un cero de orden finito s de la función $p_0(x)$, cero de orden $s-1$ o superior de la función $p_1(x)$ (si $s>1$) y cero de orden no inferior a $s-2$ del coeficiente $p_2(x)$ (si $s>2$), entonces existe por lo menos una solución no trivial de la ecuación (2.91) en forma de suma de una serie generalizada de potencias*

$$y=a_0(x-x_0)^k+a_1(x-x_0)^{k+1}+\ldots+a_n(x-x_0)^{k+n}+\ldots \qquad (2.92)$$

donde k es un número real que puede ser entero o quebrado, positivo o negativo.

La segunda solución linealmente independiente de (2.92), por regla general, tiene también la forma de suma de una serie generalizada de potencias, pero a veces puede contener además el producto de una serie generalizada de potencias por $\ln(x-x_0)$.

En problemas concretos se puede proceder sin los dos teoremas formulados más arriba, sobre todo porque en el enunciado de éstos no se establecen las regiones de convergencia de las series consideradas. Con mayor frecuencia en problemas concretos se escoge una

serie de potencias o una serie generalizada de potencias que satisfaga formalmente la ecuación diferencial, o sea, que al sustituírla en la ecuación considerada de orden n (2.90) la transforme en una identidad, si suponemos la convergencia de la serie y la posibilidad de su derivación término a término n veces. Al obtener formalmente la solución en forma de serie, se investiga su convergencia y la posibilidad de su derivación término a término n veces. En la región donde la serie converge y permite su derivación término a término n veces, la misma no solamente satisface formalmente la ecuación, sino que su suma es en realidad la solución buscada.

Ejemplo 1.

$$y'' - xy = 0. \tag{2.93}$$

Busquemos la solución en forma de una serie de potencias

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Basándonos en el teorema 2.9, o derivando esta serie formalmente término a término dos veces y sustituyendo en la ecuación (2.93), obtenemos

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n (n-1) x^{n-2} - x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \equiv 0.$$

Igualando los coeficientes de iguales potencias de x en ambos miembros de la identidad, obtenemos $a_2 = 0$, $3\cdot 2a_3 - a_0 = 0$, de donde $a_3 = \frac{a_0}{2\cdot 3}$; $4\cdot 3a_4 - a_1 = 0$, de donde $a_4 = \frac{a_1}{3\cdot 4}$; $5\cdot 4a_5 - a_2 = 0$, de donde $a_5 = \frac{a_2}{4\cdot 5}, \ldots, n(n-1)a_n - a_{n-3} = 0$, de donde $a_n = \frac{a_{n-3}}{(n-1)n}, \ldots$ Por consiguiente,

$$a_{3n-1} = 0, \quad a_{3n} = \frac{a_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\ldots(3n-1)3n},$$

$$a_{3n+1} = \frac{a_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\ldots 3n(3n+1)} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

a_0 y a_1 permanecen arbitrarios. De esta manera,

$$y = a_0 \left[1 + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} + \ldots + \frac{x^{3n}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\ldots(3n-1)3n} + \ldots\right] + \\ + a_1 \left[x + \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \ldots + \frac{x^{3n+1}}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\ldots 3n(3n+1)} + \ldots\right]. \tag{2.94}$$

El radio de convergencia de esta serie de potencias es infinito. Por consiguiente, la suma de la serie (2.94) para valores cualesquiera de x es solución de la ecuación considerada.

Ejemplo 2.

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2) y = 0. \tag{2.95}$$

Esta ecuación se llama *ecuación de Bessel* de orden n, a pesar de que se encuentra por primera vez en los trabajos de L. Euler y de D. Bernoulli. A la ecuación

de Bessel se reducen muchos problemas de la física matemática; por ello, la estudiaremos con más detalle.

En virtud del teorema 2.10, por lo menos una solución no trivial de la ecuación de Bessel puede hallarse en forma de suma de una serie generalizada de potencias

$$y=\sum_{p=0}^{\infty} a_p x^{p+k}.$$

Derivando esta serie término a término dos veces, y sustituyéndola en la ecuación (2.95), se obtiene

$$x^2 \sum_{p=0}^{\infty} a_p (k+p)(k+p-1) x^{k+p-2}+$$
$$+x \sum_{p=0}^{\infty} a_p (k+p) x^{k+p-1}+(x^2-n^2) \sum_{p=0}^{\infty} a_p x^{k+p}=0.$$

Comparando los coeficientes de iguales potencias de x en ambos miembros de esta igualdad, obtenemos

$$\begin{aligned}
a_0 (k^2-n^2] &= 0,\\
a_1 [(k+1)^2-n^2] &= 0,\\
[(k+2)^2-n^2] a_2+a_0 &= 0,\\
[(k+3)^2-n^2] a_3+a_1 &= 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\\
[(k+p)^2-n^2] a_p+a_{p-2} &= 0.
\end{aligned}$$

Como el coeficiente a_0 para la menor potencia de x se puede considerar diferente de cero, la primera ecuación se reduce a la forma

$$k^2-n^2=0, \text{ de donde } k=\pm n.$$

Para concretar, vamos a considerar por ahora $k=n\geqslant 0$; entonces la segunda ecuación $a_1 [(n+1)^2-n^2]=0$ se obtiene: $a_1=0$ y, por lo tanto, todas las $a_{2p+1}=0$

$$a_2=-\frac{a_0}{(n+2)^2-n^2}=-\frac{a_0}{2^2 (n+1)},$$

$$a_4=-\frac{a_2}{(n+4)^2-n^2}=-\frac{a_2}{2^2 (n+2) 2}=\frac{a_0}{2^4 (n+1)(n+2) 1\cdot 2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{2p}=\frac{(-1)^p a_0}{2^{2p}\cdot p!\,(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Para $k=-n$, de manera completamente análoga se obtiene

$$a_{2p+1}=0,\quad a_{2p}=\frac{(-1)^p a_0}{2^{2p}\, p!\,(-n+1)(-n+2)\ldots(-n+p)}.$$

Para $k=n$, obtenemos la solución

$$y=a_0\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p x^{2p+n}}{2^{2p}\, p!\,(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}.$$

A esta solución se le puede dar una forma más cómoda, si escogemos la constante arbitraria $a_0 = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)}$, donde Γ es la *función gamma* de Euler. Recordemos que

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx, \text{ para } p > 0, \ \Gamma(p+1) = p\Gamma(p).$$

Entonces

$$y = \sum_{p=0}^\infty \frac{(-1)^p \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n}}{p! \, \Gamma(n+p+1)}. \tag{2.96}$$

Esta solución se denota generalmente por $J_n(x)$, y se llama *función de Bessel de primera especie de orden n*.

Para $k = -n$, tomando $a_0 = \frac{1}{2^{-n}\Gamma(-n+1)}$, obtenemos análogamente la función de Bessel de primera especie de orden $-n$:

$$J_{-n}(x) = \sum_{p=0}^\infty \frac{(-1)^p \left(\frac{x}{2}\right)^{2p-n}}{p! \, \Gamma(-n+p+1)}. \tag{2.97}$$

Las series (2.96) y (2.97) convergen para valores cualesquiera de x (en (2.97), $x \neq 0$) y pueden ser derivadas dos veces término a término. Por lo tanto, $J_n(x)$ y $J_{-n}(x)$ son soluciones de la ecuación de Bessel (2.95).

Si n no es igual a un entero, las soluciones $J_n(x)$ y $J_{-n}(x)$ son linealmente independientes, puesto que sus desarrollos en serie comienzan por diferentes potencias de x, y por lo tanto la combinación lineal $\alpha_1 J_n(x) + \alpha_2 J_{-n}(x)$ puede ser idénticamente nula sólo cuando $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Si, en cambio, n es entero, entonces, como para los valores enteros negativos de p y para $p = 0$ la función $\Gamma(p)$ se vuelve infinito, los desarrollos en serie de las funciones $J_n(x)$ y $J_{-n}(x)$ comienzan por potencias iguales de x y, como no es difícil comprobar, las funciones $J_n(x)$ y $J_{-n}(x)$ tendrán la siguiente dependencia lineal:

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x).$$

Por lo tanto, para n entero, en lugar de $J_{-n}(x)$ hay que buscar otra solución que sea linealmente independiente de $J_n(x)$. Esta solución se puede obtener de distintas maneras. Por ejemplo, se puede, conociendo una solución particular $J_n(x)$, disminuir el orden de la ecuación (2.95) mediante la sustitución señalada en la pág. 104, o buscar directamente la solución en forma de la suma de una serie generalizada de potencias y del producto de dicha serie por $\ln x$. La solución linealmente independiente de $J_n(x)$, obtenida por cualquiera de estos métodos, para una determinada elección del factor constante arbitrario se llama *función de Bessel de segunda especie*, y se designa por $Y_n(x)$.

Habitualmente, sin embargo, $Y_n(x)$ se determina de la manera siguiente: considerando, primeramente, a n no entero, se toma la solución $Y_n(x)$ de la ecuación de Bessel que es combinación lineal de las soluciones $J_n(x)$ y $J_{-n}(x)$:

$$Y_n(x) = \frac{J_n(x) \cos n\pi - J_{-n}(x)}{\operatorname{sen} n\pi};$$

luego, pasando al límite para n tendiente a un número entero, se obtiene la

solución particular $Y_n(x)$, linealmente independiente de $J_n(x)$, determinada ahora también para valores enteros de n.

De este modo, la solución general de la ecuación de Bessel cuando n no es igual a un entero, tiene la forma:

$$y=c_1J_n(x)+c_2J_{-n}(x),$$

y para n entero,

$$y=c_1J_n(x)+c_2Y_n(x),$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

Las funciones de Bessel de primera y segunda especie están estudiadas muy detalladamente y, en particular, se han confeccionado tablas detalladas de sus valores. Por ello, si cualquier problema se reduce a funciones de Bessel, lo podemos considerar resuelto en la misma medida en que se considera resuelto un problema cuya respuesta se da, por ejemplo, en funciones trigonométricas.

Con frecuencia, en las aplicaciones hay que considerar la ecuación

$$x^2y''+xy'+(m^2x^2-n^2)\,y=0. \tag{2.98}$$

Esta ecuación se reduce a la ecuación de Bessel por la sustitución de variables $x_1=mx$. En efecto, para dicha sustitución,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dx_1}\frac{dx_1}{dx}=\frac{dy}{dx_1}m,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dx_1^2}m^2,$$

y la ecuación (2.98) se reduce a la ecuación de Bessel:

$$x_1^2\frac{d^2y}{dx_1^2}+x_1\frac{dy}{dx_1}+(x_1^2-n^2)\,y=0.$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación (2.98) para n diferente de un entero, tiene la forma

$$y=c_1J_n(mx)+c_2J_{-n}(mx),$$

y para n entero,

$$y=c_1J_n(mx)+c_2Y_n(mx).$$

Ejemplo 3.

$$x^2y''+xy'+\left(4x^2-\frac{9}{25}\right)y=0.$$

La solución general tiene la forma

$$y=c_1J_{\frac{3}{5}}(2x)+c_2J_{-\frac{3}{5}}(2x).$$

Ejemplo 4.

$$x^2y''+xy'+(3x^2-4)\,y=0.$$

La solución general es

$$y=c_1J_2(x\sqrt{3})+c_2Y_2(x\sqrt{3}).$$

Ejemplo 5. Intengrar la ecuación

$$x^2y''+xy'+\left(4x^2-\frac{1}{9}\right)y=0$$

con la condición de que la solución sea continua en el punto $x=0$, e $y(0{,}3)=2$.

La solución general tiene la forma

$$y=c_1J_{\frac{1}{3}}(2x)+c_2J_{-\frac{1}{3}}(2x).$$

La función $J_{-\frac{1}{3}}(2x)$ es discontinua para $x=0$, puesto que la serie (2.97) comienza por potencias negativas de x. Por lo tanto, la solución y es continua en el punto $x=0$ sólo para $c_2=0$:

$$y=c_1 J_{\frac{1}{3}}(2x).$$

Al satisfacer la segunda condición $y(0,3)=2$, obtenemos

$$c_1=\frac{2}{J_{\frac{1}{3}}(0,6)}.$$

En las tablas de las funciones de Bessel hallamos $J_{\frac{1}{3}}(0,6)=0,700$; por consiguiente $c_1 \approx 2,857$ e

$$y \approx 2,857\, J_{\frac{1}{3}}(2x).$$

En las aplicaciones se exige a menudo hallar las *soluciones periódicas* de cierta ecuación diferencial. En este caso generalmente conviene buscar la solución en forma de serie de Fourier:

$$x(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi}{l}t+B_n\operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}t\right).$$

Obsérvese que si la ecuación

$$x^{(n)}=F(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)}) \tag{2.99}$$

tiene una solución periódica $x_0(t)$ de período T, el segundo miembro de la ecuación (2.99) a lo largo de la curva integral considerada es función periódica de período T con respecto al primer argumento. En efecto, sustituyendo en la ecuación (2.99) la solución periódica $x=x_0(t)$, obtenemos la identidad

$$x_0^{(n)}(t)\equiv F(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), \ldots, x_0^{(n-1)}(t)).$$

Sustituyendo en esta identidad t por $t+T$, debido a la periodicidad de la función $x_0(t)$ y de sus derivadas, el primer miembro de la ecuación no varía, y tampoco los argumentos del segundo miembro, a partir del segundo. Por lo tanto,

$$F(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), \ldots, x_0^{(n-1)}(t))\equiv$$
$$\equiv F(t+T, x_0(t), \dot{x}_0(t), \ldots, x_0^{(n-1)}(t)),$$

o sea, que la función F a lo largo de la curva integral $x=x_0(t)$ tiene período T respecto al argumento t, que figura explícitamente.

En consecuencia, si el segundo miembro de la ecuación (2.99), para cualquier $x_0(t)$, no es función periódica con respecto al primer argumento, entonces no existen tampoco soluciones periódicas. Si la función F no depende explícitamente de t, es decir, es constante con respecto al argumento t, entonces se puede considerar como función periódica con respecto a t de cualquier período, y por ello no se excluye la posibilidad de la existencia de soluciones periódicas de período arbitrario.

Supongamos, por ejemplo, que se exige hallar las soluciones periódicas de la ecuación

$$\ddot{x}+a^2x=f(t). \qquad (2.100)$$

Para la existencia de solución periódica es necesario suponer que f es función periódica. Sin limitaciones sustanciales de la generalidad, se puede considerar que $f(t)$ es función periódica de periodo 2π, ya que si la función $f(t)$ tuviera período T, entonces, luego de la transformación de la variable independiente $t_1=\frac{2\pi}{T}t$, el segundo miembro sería función de período 2π con respecto a la nueva variable independiente t_1.

Consideremos, además, que la función $f(t)$ es continua y pueden desarrollarse en la serie de Fourier

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\operatorname{sen}kt). \qquad (2.101)$$

La solución periódica se busca en la forma

$$x(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cos kt+B_k\operatorname{sen}kt). \qquad (2.102)$$

Derivando dos veces término a término la serie (2.102) y sustituyéndola en la ecuación (2.100), se obtiene:

$$-\sum_{k=1}^{\infty}k^2(A_k\cos kt+B_k\operatorname{sen}kt)+$$
$$+a^2\left[\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cos kt+B_k\operatorname{sen}kt)\right]=$$
$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\operatorname{sen}kt),$$

de donde, si a no es un entero, se determinan los coeficientes de

la serie (2.102):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{a^2A_0}{2}=\frac{a_0}{2}, \quad A_0=\frac{a_0}{a^2},\\ &(a^2-k^2)A_k=a_k, \quad A_k=\frac{a_k}{a^2-k^2},\\ &(a^2-k^2)B_k=b_k, \quad B_k=\frac{b_k}{a^2-k^2}. \end{aligned}\right\} \tag{2.103}$$

Por consiguiente, la ecuación (2.100) se satisface formalmente por la serie

$$\frac{a_0}{2a^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k\cos kt+b_k\operatorname{sen} kt}{a^2-k^2}. \tag{2.104}$$

Es evidente que la serie (2.104) converge y puede ser derivada dos veces término a término, ya que la serie (2.101) converge uniformemente debido a la continuidad de la función $f(t)$, y los coeficientes de la serie

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2(a_k\cos kt+bk\operatorname{sen} kt)}{a^2-k^2}, \tag{2.105}$$

formada por las derivadas segundas de los términos de la serie (2.104), se diferencian de los coeficientes a_k y b_k de la serie (2.101) sólo en el factor $-\frac{k^2}{a^2-k^2}$, independiente de t y tendiente monótonamente a 1 cuando $k\to\infty$. Por lo tanto, la serie (2.105) converge uniformemente, por lo que la serie (2.104) se puede derivar dos veces término a término. De esta manera, la serie (2. 104) no sólo satisface formalmente la ecuación (2.100), sino que su suma $x(t)$ existe y es solución periódica de la ecuación (2.100).

Si a se diferencia poco del entero n y $a_n\neq 0$ ó $b_n\neq 0$, entonces se produce el fenómeno de *resonancia*. Este consiste en el brusco crecimiento de por lo menos uno de los coeficientes

$$\mathrm{A}_n=\frac{a_n}{a^2-n^2},\ \mathrm{B}_n=\frac{b_n}{a^2-n^2},$$

al tender a hacia n.

Si $a=n$ y por lo menos uno de los coeficientes a_n ó b_n no es igual a cero, entonces no existen soluciones periódicas, puesto que a los sumandos resonantes

$$a_n\cos nt+b_n\operatorname{sen} nt$$

en el segundo miembro de la ecuación (2.100), como se señala en la pág. 131, les corresponden según el principio de superposición un sumando no periódico de la forma

$$t(A_n\cos nt+B_n\operatorname{sen} nt)$$

en la solución general de dicha ecuación, mientras que los sumandos restantes en la solución general de (2.100) son funciones periódicas. Por lo tanto, si $a=n$ existe solución periódica de la ecuación (2.100) sólo en el caso en que el segundo miembro no contenga a los términos resonantes $a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt$, o sea cuando

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\, dt = 0, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\operatorname{sen} nt\, dt = 0. \quad (2.106)$$

En el último caso, es decir, cuando $a=n$, $a_n=b_n=0$, existe solución periódica de la ecuación (2.100); además, para $k \neq n$ los coeficientes se determinan por las fórmulas (2.103), y los coeficientes A_n y B_n permanecen arbitrarios, debido a que $A_n \cos nt + B_n \operatorname{sen} nt$ es solución, para A_n y B_n arbitrarios, de la ecuación homogénea correspondiente.

Ejemplo 6. Determinar la solución periódica de la ecuación

$$\ddot{x} + 2x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} kt}{k^4}.$$

Se busca la solución en la forma

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kt + B_k \operatorname{sen} kt)$$

y determinando los coeficientes A_k y B_k por las fórmulas (2.103), se obtiene

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} kt}{k^4(2-k^2)}.$$

Ejemplo 7. Determinar la solución periódica de la ecuación

$$\ddot{x} + 4x = \operatorname{sen}^2 t.$$

Como las condiciones de existencia de la solución periódica (2.106) no se satisfacen:

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t \operatorname{sen} 2t\, dt = 0,$$

pero

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t \cos 2t\, dt \neq 0,$$

entonces no existe solución periódica.

Ejemplo 8. Determinar la solución periódica de la ecuación

$$\ddot{x} + x = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos kt}{k^2}.$$

El segundo miembro no contiene los términos resonantes $a_1 \cos t + b_1 \operatorname{sen} t$. Por lo tanto, existe solución periódica, y ésta se determina por las fórmulas (2.103):

$$x(t) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos kt}{k^2(1-k^2)} + c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t,$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

§ 8. METODO DEL PARAMETRO PEQUEÑO Y SU APLICACION EN LA TEORIA DE LAS OSCILACIONES CUASILINEALES

En el parágrafo antierior fue señalado un método para hallar soluciones periódicas de las ecuaciones lineales de la forma

$$\ddot{x} + a^2 x = f(t).$$

En muchos problemas prácticos hay que hallar la solución periódica de una ecuación análoga, pero que tiene en el segundo miembro un término pequeño no lineal:

$$\ddot{x} + a^2 x = f(t) + \mu F(t, x, \dot{x}, \mu) \qquad (2.107)$$

donde μ es un parámetro pequeño.

Si se suprime el término $\mu F(t, x, \dot{x}, \mu)$, es decir, si se considera $\mu = 0$ en (2.107), entonces se obtiene la ecuación lineal

$$\ddot{x} + a^2 x = f(t),$$

que se denomina generadora de la ecuación (2. 107).

Uno de los métodos más efectivos para hallar soluciones periódicas de la ecuación (2.107) de oscilaciones no lineales con término pequeño no lineal, es el método de desarrollo de la solución en serie de potencias del parámetro pequeño μ, desarrollado por A. Poincaré y por A. M. Liapunov, ampliamente utilizado en la actualidad en la resolución de los más variados problemas.

En base al teorema sobre la dependencia analítica de la solución respecto al parámetro (véase la pág. 58), fácilmente generalizable a las ecuaciones de segundo y otros órdenes, se puede afirmar que las soluciones $x(t, \mu)$ de la ecuación (2.107) serán funciones analíticas del parámetro μ para los valores de μ de módulo suficientemente pequeño, si la función $f(t)$ es continua, y la función $F(t, x, \dot{x}, \mu)$, continua en t, depende analiticamente de los demás argumentos: de x y de $\dot{x}$ en la región en la que en lo sucesivo variarán dichas variables, y de μ para valores de μ suficientemente pequeños en valor absoluto.

Considerando que estas condiciones se cumplen, buscamos la solución periódica $x(t, \mu)$ en forma de serie:

$$x(t, \mu) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \ldots + \mu^n x_n(t) + \ldots$$

Derivemos esta serie término a término dos veces

$$\dot{x}(t,\mu)=\dot{x}_0(t)+\mu\dot{x}_1(t)+\ldots+\mu^n\dot{x}_n(t)+\ldots$$
$$\ddot{x}(t,\mu)=\ddot{x}_0(t)+\mu\ddot{x}_1(t)+\ldots+\mu^n\ddot{x}_n(t)+\ldots$$

y sustituyámosla en la ecuación (2.107), en la cual la función $F(t,x,\dot{x},\mu)$ ha sido previamente desarrollada en serie de potencias

de $x-x_0$, $\dot{x}-\dot{x}_0$ y μ,

$$\ddot{x}+a^2x=f(t)+\mu\left[F(t,\ x_0,\dot{x}_0,0)+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0\\ \dot{x}=\dot{x}_0\\ \mu=0}}(x-x_0)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{\substack{x=x_0\\ \dot{x}=\dot{x}_0\\ \mu=0}}(\dot{x}-\dot{x}_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial \mu}\right)_{\substack{x=x_0\\ \dot{x}=\dot{x}_0\\ \mu=0}}\mu+\ldots\right]. \qquad (2.108)$$

Comparando los coeficientes de iguales potencias de μ en ambos miembros de la ecuación (2.108), se obtiene

$$\left.\begin{aligned}
&\ddot{x}_0+a^2x_0=f(t),\\
&\ddot{x}_1+a^2x_1=F(t,\ x_0\ \dot{x}_0,\ 0),\\
&\ddot{x}_2+a^2x_2=\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0\\ \dot{x}=\dot{x}_0\\ \mu=0}}x_1+\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{\substack{x=x_0\\ \dot{x}=\dot{x}_0\\ \mu=0}}\dot{x}_1+\left(\frac{\partial F}{\partial \mu}\right)_{\substack{x=x_0\\ \dot{x}=\dot{x}_0\\ \mu=0}}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (2.109)$$

La primera de estas ecuaciones lineales coincide con la ecuación generadora. Integrándola y sustituyendo la solución hallada $x_0(t)$ en la segunda ecuación, obtenemos para la determinación de $x_1(t)$ nuevamente una ecuación lineal, y así sucesivamente.

Para la determinación de $x_n(t)$ también se obtiene una ecuación lineal, puesto que en el segundo miembro de esta ecuación x_i y $\dot{x}_i$ figurarán sólo con índices menores que n, ya que, debido a que F está multiplicada por μ, los términos en el segundo miembro que contienen x_n y $\dot{x}_n$, y con mayor razón x_k y $\dot{x}_k$ con índices mayores, estarán multiplicados por μ elevado a una potencia no menor de $n+1$.

En este parágrafo se considera sólo el problema de la búsqueda de soluciones periódicas; por ello, según la observación de las págs. 146—147, al segundo miembro de la ecuación

$$\ddot{x}+a^2x=f(t)+\mu F(t,\ x,\ \dot{x},\ \mu)$$

es natural imponerle otra limitación: exigir que sea función periódica con respecto al argumento t, contenido explícitamente. Sin limitaciones sustanciales de la generalidad, se puede considerar

que el menor período del segundo miembro es igual a 2π, si el segundo miembro depende explícitamente de t. Entonces, si $f(t)$ no es igual a una constante, las soluciones periódicas de la ecuación (2.107), si existen, pueden tener sólo períodos iguales a 2π o múltiplos de éste (véanse las págs. 146—147), para μ suficientemente pequeños.

Para hallar la solución periódica de la ecuación (2.108) en la forma

$$x(t, \mu) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \ldots + \mu^n x_n(t) + \ldots \qquad (2.110)$$

es necesario determinar las soluciones periódicas $x_k(t)$ de las ecuaciones (2.109). En efecto, si la solución $x(t, \mu)$ tiene período constante 2π (ó $2m\pi$, m es un número entero) para cualquier μ suficientemente pequeño en valor absoluto, entonces

$$x_0(t) + \mu x_1(t) + \ldots + \mu^n x_n(t) + \ldots \equiv x_0(t + 2\pi + \\ + \mu x_1(t + 2\pi) + \ldots + \mu^n x_n(t + 2\pi) + \ldots \qquad (2.111)$$

Por consiguiente, los coeficientes de iguales potencias de μ en ambos miembros de la identidad (2.111) deben ser iguales, es decir

$$x_n(t) \equiv x_n(t + 2\pi),$$

lo que precisamente significa la periodicidad de las funciones $x_n(t)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. La coincidencia de los coeficientes de iguales potencias de μ en ambos miembros de la identidad (2.111) se puede obtener, por ejemplo, derivando dicha identidad n veces con respecto a μ, después de lo cual, haciendo $\mu = 0$, obtenemos

$$x_n(2\pi + t) = x_n(t) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

De este modo, se deben hallar las soluciones periódicas de las ecuaciones (2.109). Aquí es conveniente analizar por separado los siguientes casos.

1. Caso de no resonancia: a no es igual a un entero. Si a no es entero, entonces la primera de las ecuaciones (2.109) tiene una solución periódica única $x_0 = \varphi_0(t)$, la que se halla por el método del parágrafo anterior (véase la pág. 147). Luego, por el mismo método, se hallan $x_1(t)$, $x_2(t)$, etc.

Si por este método hallásemos el término general de la serie (2.110), estableciésemos la convergencia de ésta y la licitud de su derivación término a término dos veces, entonces la suma de la serie (2.110) sería la solución periódica buscada de período 2π. Sin embargo, por lo general, la búsqueda del término general de la serie (2.110) es un problema sumamente complejo, por lo que no hay más remedio que limitarse al cálculo de sus primeros términos. Esto sería suficiente para hallar aproximadamente la solución

periódica, si tuviéramos la seguridad de que la serie converge y de que su suma es la solución periódica.

En relación con esto tienen gran significado los teoremas de A. Poincaré de existencia de soluciones periódicas, los cuales permiten, en particular, hallar las condiciones que aseguran la existencia de una solución periódica única de la ecuación (2.107), que tiende a la solución periódica de la ecuación generadora, cuando $\mu \to 0$.

Si las condiciones del teorema de A. Poincaré se cumplen y, por lo tanto, existe una solución periódica única de la ecuación (2.107), que tiende, cuando $\mu \to 0$, a la solución periódica de la ecuación generadora, entonces la suma de la serie única con coeficientes periódicos (2. 110) que satisface formalmente a la ecuación (2.107), debe existir y coincidir con la solución periódica buscada. Aquí no es necesario buscar el término general de la serie (2.110) para investigar la convergencia de la serie y se puede afirmar, luego de hallar algunos primeros términos de ésta, que para pequeños μ su suma es aproximadamente igual a la solución periódica buscada.

Los teoremas de A. Poincaré, basados en nociones de la teoría de funciones analíticas, son muy complejos; por ello, expondremos al final de este parágrafo sólo el más simple de estos teoremas, el cual, sin embargo, ya permite afirmar que, en el caso considerado de no resonancia, la ecuación (2.107) tiene siempre solución periódica única si μ es suficientemente pequeño.

E j e m p l o 1. Determinar aproximadamente la solución periódica de la ecuación

$$\ddot{x} + 2x = \operatorname{sen} t + \mu x^2,$$

donde μ es un parámetro pequeño (determinar dos términos de la serie (2.110)).
Buscamos la solución en la forma

$$x(t, \mu) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \ldots + \mu^n x_n(t) + \ldots$$

Hallamos la solución periódica de la ecuación generadora:

$$\ddot{x} + 2x_0 = \operatorname{sen} t, \quad x_0(t) = \operatorname{sen} t.$$

La solución periódica de la ecuación

$$\ddot{x}_1 + 2x_1 = \operatorname{sen}^2 t, \text{ o bien } \ddot{x}_1 + 2x_1 = \frac{1 - \cos 2t}{2}$$

tiene la forma

$$x_1 = \frac{1}{4} + \frac{\cos 2t}{4}.$$

Por consiguiente, la solución periódica es

$$x(t, \mu) \approx \operatorname{sen} t + \frac{1}{4}(1 + \cos 2t)\mu.$$

2. Caso de resonancia. El método del parámetro pequeño puede ser aplicado también en el caso de resonancia, es decir, en el caso cuando en la ecuación (2.107) a es igual al entero n o tiende a éste cuando $\mu \to 0$.

Si en la ecuación (2.107) a se diferencia poco del entero n, más exactamente, si la diferencia $a^2 - n^2$ tiene orden de infinitud no menor que μ:

$$a^2 - n^2 = \mu a_1, \tag{2.112}$$

donde a_1 está acotada cuando $\mu \to 0$, entonces la ecuación

$$\ddot{x} + a^2 x = f(t) + \mu F(t, x, \dot{x}, \mu)$$

se puede escribir en la forma

$$\ddot{x} + n^2 x = f(t) + (n^2 - a^2) x + \mu F(t, x, \dot{x}, \mu)$$

de donde, debido a (2.112),

$$\ddot{x} + n^2 x = f(t) + \mu F_1(t, x, \dot{x}, \mu),$$

donde la función F_1 satisface las mismas condiciones que satisface, por hipótesis, la función F.

Por lo tanto, en lo sucesivo en el caso de resonancia se puede considerar que a es entero:

$$\ddot{x} + n^2 x = f(t) + \mu F(t, x, \dot{x}, \mu).$$

Aplicando el método del parámetro pequeño, se busca la solución periódica en forma de la serie

$$x(t, \mu) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \ldots + \mu^k x_k(t) + \ldots$$

Para determinar la función $x_k(t)$ se obtienen nuevamente las ecuaciones (2.109), en las que $a^2 = n^2$. Pero, en este caso, la ecuación generadora

$$\ddot{x}_0 + n^2 x_0 = f(t) \tag{2.113}$$

tiene solución periódica sólo en el caso en que el segundo miembro no contenga a los términos resonantes, o sea, cuando se cumplan las condiciones (véase la pág. 149)

$$\left.\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt\,dt = 0, \\ \int_0^{2\pi} f(t) \operatorname{sen} nt\,dt = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.106}$$

Si estas condiciones se cumplen, entonces todas las soluciones de la ecuación (2.113) serán periódicas, con período 2π (véase la pág. 149):

$$x_0(t) = c_{10}\cos nt + c_{20}\operatorname{sen} nt + \varphi_0(t).$$

La función $x_1(t)$ se determina de la ecuación

$$\ddot{x}_1 + n^2 x_1 = F(t,\ x_0,\ \dot{x}_0,\ 0). \tag{2.114}$$

Esta ecuación tiene también soluciones periódicas sólo en el caso en que el segundo miembro no contenga a los términos resonantes, es decir, cuando se cumplan las condiciones

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} F(t,\ x_0,\ \dot{x}_0,\ 0)\cos nt\,dt = 0, \\ &\int_0^{2\pi} F(t,\ x_0,\ \dot{x}_0,\ 0)\operatorname{sen} nt\,dt = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.115}$$

Las ecuaciones (2.115) contienen C_{10} y C_{20}, las cuales, en general, se determinan precisamente de este sistema.

Supongamos que C_{10} y C_{20} satisfacen al sistema (2.115); entonces todas las soluciones de la ecuación (2.114) tienen período 2π:

$$x_1(t) = c_{11}\cos nt + c_{21}\operatorname{sen} nt + \varphi_1(t). \tag{2.116}$$

Además, c_{11} y c_{21} se determinan nuevamente a partir de las dos condiciones de ausencia de los términos resonantes en la ecuación siguiente de (2.109):

$$\ddot{x}_2 + n^2 x_2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\substack{x = x_0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 \\ \mu = 0}} x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{\substack{x = x_0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 \\ \mu = 0}} \dot{x}_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial \mu}\right)_{\substack{x = x_0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 \\ \mu = 0}}$$

y así sucesivamente.

Por lo tanto, no a cada solución periódica

$$x_0 = c_{10}\cos nt + c_{20}\operatorname{sen} nt + \varphi_0(t)$$

de la ecuación generadora le corresponden soluciones periódicas de la ecuación (2.107) para pequeños valores de μ, sino sólo a algunas, cuyos valores de c_{10} y c_{20} satisfacen las ecuaciones (2.115). Está claro que también en el caso de resonancia para estar seguros, sin hallar el término general de la serie (2.110), de que por el método señalado se hallará la solución periódica, hay que demostrar previamente el teorema de existencia de las soluciones periódicas. Esta observación se refiere también a los casos que serán expuestos en los puntos 3 y 4.

3. **Resonancia de n-ésimo orden.** A veces, en los sistemas descritos por la ecuación

$$\ddot{x}+a^2x=f(t)+\mu F(t,\ x,\ \dot{x},\ \mu), \qquad (2.107)$$

que satisface las condiciones arriba señaladas, se observan oscilaciones intensivas, cuando la frecuencia propia se diferencia poco de $\frac{1}{n}$, donde n es un entero. Este fenómeno se llama resonancia de n-ésimo orden.

Desde el punto de vista matemático esto significa que cuando a se diferencia poco de $\frac{1}{n}$, donde n es un entero mayor que la unidad, la ecuación (2.107) puede tener soluciones periódicas de período $2\pi n$, que no son a la vez soluciones periódicas de período 2π.

Sea

$$\ddot{x}+\frac{1}{n^2}x=f(t)+\mu F(t,\ x,\ \dot{x},\ \mu) \qquad (2.117)$$

(si a se diferencia poco de $\frac{1}{n}$, más exactamente, si $a^2-\frac{1}{n^2}=\mu a_1$, donde a_1 es acotada cuando $\mu\rightarrow 0$, entonces, pasando el término $\left(a^2-\frac{1}{n^2}\right)x$ al segundo miembro e incluyéndolo en $\mu F(t,\ x,\ \dot{x},\ \mu)$, obtenemos una ecuación de la forma (2.117)).

La solución periódica de la ecuación (2.117) de período $2\pi n$ se busca en forma de la serie

$$x(t,\ \mu)=x_0(t)+\mu x_1(t)+\ldots+\mu^n x_n(t)+\ldots \qquad (2.110)$$

Sustituyendo (2.110) en la ecuación (2.117) y comparando los coeficientes de iguales potencias de μ, obtenemos las ecuaciones (2.109), en las cuales $a=\frac{1}{n}$. Para determinar $x_0(t)$, se obtiene la ecuación generadora

$$\ddot{x}_0+\frac{1}{n^2}x_0=f(t), \qquad (2.118)$$

que tiene solución periódica de período $2\pi n$ sólo cuando el segundo miembro no contiene a los términos resonantes, o sea, cuando

$$\int_0^{2\pi n} f(t)\cos\frac{t}{n}\,dt=0 \quad \text{y} \quad \int_0^{2\pi n} f(t)\operatorname{sen}\frac{t}{n}\,dt=0.$$

Si estas condiciones se cumplen, entonces todas las soluciones de la ecuación (2.118) tienen periódo $2\pi n$:

$$x_0=c_{10}\cos\frac{t}{n}+c_{20}\operatorname{sen}\frac{t}{n}+\varphi_0(t),$$

donde c_{10} y c_{20} son constantes arbitrarias.

La ecuación que determina a x_1,

$$\ddot{x}_1 + \frac{1}{n^2} x_1 = F(t,\ x_0,\ \dot{x}_0,\ \mu), \tag{2.119}$$

tendrá soluciones periódicas de período $2\pi n$ sólo cuando el segundo miembro no contenga a los términos resonantes, es decir, cuando se cumplan las condiciones

$$\left.\begin{aligned} \int_0^{2\pi n} F(t,\ x_0,\ \dot{x}_0,\ \mu) \cos\frac{t}{n}\, dt = 0, \\ \int_0^{2\pi n} F(t,\ x_0,\ \dot{x}_0,\ \mu) \operatorname{sen}\frac{t}{n}\, dt = 0, \end{aligned}\right\} \tag{2.120}$$

de las cuales, en general, se determinan c_{10} y c_{20}.

Si las condiciones (2.120) se satisfacen, todas las soluciones de la ecuación (2.119)

$$x_1 = c_{11} \cos\frac{t}{n} + c_{21} \operatorname{sen}\frac{t}{n} + \varphi_1(t)$$

tienen período $2\pi n$. Para la determinación de las constantes arbitrarias c_{11} y c_{21} utilizamos las dos condiciones de la ausencia de los términos resonantes en la ecuación siguiente de (2.109):

$$\ddot{x}_2 + \frac{1}{n^2} x_2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\substack{x = x_0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 \\ \mu = 0}} x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{\substack{x = x_0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 \\ \mu = 0}} \dot{x}_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial \mu}\right)_{\substack{x = x_0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 \\ \mu = 0}}$$

y así sucesivamente.

4. Caso autónomo. Supongamos que el segundo miembro de la ecuación (2.107) no depende explícitamente de t, y la ecuación tiene la forma

$$\ddot{x} + a^2 x = \mu F(x,\ \dot{x},\ \mu), \tag{2.121}$$

donde la función F satisface las condiciones establecidas anteriormente. A primera vista puede parecer que el análisis de la ecuación (2.121) debe ser más sencillo que el de la (2.107), en la cual el segundo miembro depende del argumento t; sin embargo, en realidad la ausencia del argumento t en el segundo miembro de la ecuación hace el problema más complejo.

Si el segundo miembro depende explícitamente de t, entonces, como fue ya señalado anteriormente, son conocidos los posibles períodos de las soluciones, puesto que éstos pueden ser sólo iguales al período del segundo miembro, o múltiplos de éste, a lo largo de las soluciones, respecto al argumento t contenido explícitamente.

Si, en cambio, el segundo miembro no contiene a t, se lo puede considerar como función periódica de período arbitrario y, por lo tanto, no se excluye la posibilidad de la existencia de una solución de cualquier período, siendo éste, en general, función del parámetro μ. Debido a que el período de $x(t, \mu)$, en general, es función de μ, no sería conveniente buscar la solución en forma de la serie

$$x(t, \mu)=x_0(t)+\mu x_1(t)+\ldots+\mu^n x_n(t)+\ldots, \qquad (2.110)$$

puesto que cada función $x_n(t)$ por separado no está obligada a ser función periódica. Por consiguiente, las funciones $x_n(t)$ no podrían ser halladas por los métodos anteriores. Por eso hay que transformar la ecuación (2.121) a una nueva variable independiente, de manera que con respecto a dicha variable la ecuación tenga período constante, y luego buscar la solución en forma de la serie (2.110).

Previamente, para simplificar, transformemos la ecuación (2.121), por la sustitución de la variable independiente $t_1=at$, a la forma

$$\frac{d^2x}{dt_1^2}+x=\mu F_1(x, \dot{x}, \mu). \qquad (2.122)$$

Cada solución de la ecuación generadora $x_0(t_1)=c_1\cos(t_1-t_0)$ tendrá período 2π, y las soluciones periódicas de la ecuación (2.122) para $\mu\neq 0$, si éstas existen, tendrán período $2\pi+\alpha(\mu)$; además, se puede demostrar que $\alpha(\mu)$ es función analítica de μ cuando μ es suficientemente pequeño.

Desarrollemos $\alpha(\mu)$ en serie de potencias de μ; entonces

$$2\pi+\alpha(\mu)=2\pi(1+h_1\mu+h_2\mu^2+\ldots+h_n\mu^n+\ldots), \qquad (2.123)$$

donde h_j son ciertas magnitudes constantes por ahora desconocidas.

Transformemos las variables de manera que la solución periódica $x(t, \mu)$ de la ecuación (2.122) no tenga período $2\pi+\alpha(\mu)$, sino período constante 2π. Esto se logra por la sustitución de las variables

$$t_1=t_2(1+h_1\mu+h_2\mu^2+\ldots+h_n\mu^n+\ldots) \qquad (2.124)$$

ya que, debido a la dependencia (2.123), al variar t_1 desde 0 hasta $2\pi+\alpha(\mu)$, la nueva variable t_2 varía desde 0 hasta 2π. Con esto (2.122) se lleva a la forma:

$$\begin{gathered}\ddot{x}_{t_2t_2}+(1+h_1\mu+\ldots+h_n\mu^n+\ldots)^2x=\\=\mu(1+h_1\mu+\ldots+h_n\mu^n+\ldots)^2F_1\times\\\times(x, (1+h_1\mu+\ldots+h_n\mu^n+\ldots)^{-1}x_{t_2}, \mu).\end{gathered} \qquad (2.125)$$

La solución periódica de esta ecuación se busca en la forma

$$x(t_2, \mu)=x_0(t_2)+\mu x_1(t_2)+\ldots+\mu^n x_n(t_2)+\ldots, \qquad (2.126)$$

donde $x_n(t_2)$ son funciones periódicas del argumento t_2 de período 2π. Sustituyendo (2.126) en la ecuación (2.125) y comparando los coeficientes de potencias iguales de μ en ambos miembros de la igualdad, se obtiene

$$\ddot{x}_0+x_0=0,\ \text{de donde}\ x_0=c\cos(t_2-t_0),$$
$$\ddot{x}_1+x_1=-2h_1x_0+F_1(x_0,\ \dot{x}_0,\ 0),$$

bien

$$\ddot{x}_1+x_1=-2h_1c\cos(t_2-t_0)+ \\ +F_1(c\cos(t_2-t_0),\ -c\operatorname{sen}(t_2-t_0),\ 0) \qquad (2.127)$$

. . . .

Para que la ecuación (2.127) tenga soluciones periódicas, es necesario y suficiente que su segundo miembro no contenga a los términos resonantes (véase (2.106)), es decir, que

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^{2\pi} F_1(c\cos(t_2-t_0),\ -c\operatorname{sen}(t_2-t_0),\ 0)\operatorname{sen}(t_2-t_0)\,dt_2=0,\\ &-2h_1c+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F_1(c\cos(t_2-t_0),\ -c\operatorname{sen}(t_2-t_0),0)\times\\ &\qquad\qquad\times\cos(t_2-t_0)\,dt_2=0.\end{aligned}\right\} \qquad (2.128)$$

La primera ecuación da la posibilidad de hallar el valor de c, y la segunda, el de h_1. Después de esto, se hallan las soluciones de la ecuación generadora $x_0=c\cos(t_2-t_0)$, en cuyo entorno para pequeños μ hay soluciones periódicas de la ecuación (2.122) y se determina aproximadamente el período de la solución buscada

$$2\pi+\alpha(\mu)\approx 2\pi(1+h_1\mu).$$

Conociendo c y h_1, se puede determinar $x_1(t_2)$ y, si es necesario, calcular por el mismo método $x_2(t_2)$, $x_3(t_2)$, etc.

Ejemplo 2.

$$\ddot{x}-x=\mu\dot{x}(9-x^2). \qquad (2.129)$$

Determinar las soluciones de la ecuación generadora, a las cuales tienden las soluciones periódicas de (2.129) cuando $\mu\to 0$.

Las soluciones de la ecuación generadora tienen la forma $x=c\cos(t-t_0)$. Para la determinación de los valores buscados de c, utilizamos la primera de las ecuaciones (2.128):

$$\int_0^{2\pi} c\,(9-c^2\cos^2(t-t_0))\operatorname{sen}^2(t-t_0)\,dt=0,$$

o bien $\pi c\left(9-\frac{c^2}{4}\right)=0$, de donde $c_1=0$, $c_{2,3}=\pm 6$.

Para $c_1=0$ se obtiene la solución trivial $x=0$ de la ecuación generadora, la cual sigue siendo solución de (2.129) para cualquier μ.
Cuando $c_{2,3}=\pm 6$, obtenemos $x=\pm 6\cos(t-t_0)$.

Demostremos uno de los teoremas más simples de A. Poincaré *de existencia y unicidad de la solución periódica* que tiende hacia la solución periódica de la ecuación generadora cuando $\mu\to 0$, aplicado a la ecuación de la forma

$$\ddot{x}=f(t,\ x,\ \dot{x},\ \mu), \tag{2.130}$$

donde la función f satisface las condiciones del teorema sobre la dependencia analítica de la solución respecto al parámetro μ para valores de μ suficientemente pequeños. Aparte de ello, consideraremos que la función f depende explícitamente de t, y que tiene período 2π respecto a t. Supongamos también que la ecuación generadora $\ddot{x}=f(t,\ x,\ \dot{x},\ 0)$ tiene solución periódica única $x=\varphi_0(t)$ de período 2π.

Designemos por $x(t,\ \mu,\ \beta_0,\ \beta_1)$ la solución de la ecuación (2.130) que satisface las condiciones iniciales

$$x(t_0)=\varphi_0(t_0)+\beta_0,\quad \dot{x}(t_0)=\dot{\varphi}_0(t_0)+\beta_1.$$

Por consiguiente, β_0 y β_1 son las desviaciones de las condiciones iniciales de la solución $x(t,\ \mu,\ \beta_0,\ \beta_1)$ y de su derivada $\dot{x}(t,\ \mu,\ \beta_0,\ \beta_1)$ respecto a las condiciones iniciales $\varphi_0(t_0)$ y $\dot{\varphi}_0(t_0)$ de la solución periódica de la ecuación generadora.

El problema consiste en indicar las condiciones bajo las cuales, para cada valor de μ de módulo suficientemente pequeño, exista una solución periódica única $x(t,\ \mu,\ \beta_0,\ \beta_1)$ de la ecuación (2.130) que tienda a la solución periódica $\varphi_0(t)$ de la ecuación generadora, cuando $\mu\to 0$.

Si la solución $x(t,\ \mu,\ \beta_0,\ \beta_1)$ es periódica de período 2π, entonces es evidente que deben satisfacerse las condiciones siguientes:

$$\left.\begin{aligned} x(2\pi,\ \mu,\ \beta_0,\ \beta_1)-x(0,\ \mu,\ \beta_0,\ \beta_1)=0,\\ \dot{x}(2\pi,\ \mu,\ \beta_0,\ \beta_1)-\dot{x}(0,\ \mu,\ \beta_0,\ \beta_1)=0.\end{aligned}\right\} \tag{2.131}$$

Designando los primeros miembros de estas ecuaciones por $\Phi_0(\mu,\beta_0,\beta_1)$ y $\Phi_1(\mu,\ \beta_0,\ \beta_1)$ respectivamente, escribamos el sistema en la forma

$$\left.\begin{aligned} \Phi_0(\mu,\ \beta_0,\ \beta_1)=0\\ \Phi_1(\mu,\ \beta_0,\ \beta_1)=0.\end{aligned}\right\} \tag{2.132}$$

Las condiciones (2.132), llamadas *condiciones de periodicidad*, son no sólo necesarias, sino también suficientes para la periodicidad de la solución $x(t,\ \mu,\ \beta_0,\ \beta_1)$ de la ecuación (2.130).

En efecto, debido a la periodicidad del segundo miembro de la ecuación (2.130) respecto a t, este segundo miembro toma en las bandas $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, $2\pi \leqslant t \leqslant 4\pi$, ..., valores iguales en los puntos $(t, x, \dot{x})$, $(t+2\pi, x, \dot{x})$, ... Por lo tanto, si en los puntos $t=0$ y $t=2\pi$ se dan condiciones iniciales x_0 y $\dot{x}_0$ iguales, éstas determinan curvas integrales completamente iguales en las bandas $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ y $2\pi \leqslant t \leqslant 4\pi$ (fig. 2.2), más exactamente, curvas que son continuación periódica una de la otra.

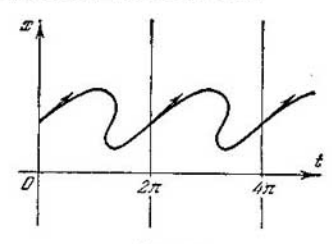


Fig. 2.2

En virtud del teorema de las funciones implícitas, se puede afirmar que si el jacobiano

$$\frac{D(\Phi_0, \Phi_1)}{D(\beta_0, \beta_1)} \neq 0$$

en el punto $\mu=0$, $\beta_0=\beta_1=0$, para cada valor de μ de módulo suficientemente pequeño existe un par único de funciones $\beta_0(\mu)$ y $\beta_1(\mu)$ que satisfacen las condiciones de periodicidad (2.132) y que tienden a cero cuando $\mu \to 0$; o sea, en las condiciones señaladas, para cada μ suficientemente pequeño, existe una solución periódica única de la ecuación (2.130) que tiende hacia la solución periódica de la ecuación generadora cuando $\mu \to 0$ *). Esta afirmación es precisamente el contenido del teorema de A. Poincaré.

Ejemplo 3. Demostrar que en el caso de no resonancia, para la ecuación

$$\ddot{x}+a^2x=f(t)+\mu F(t, x, \dot{x}, \mu), \tag{2.107}$$

donde f y F satisfacen las condiciones arriba expuestas (véase la pág. 150), se cumplen las exigencias del teorema de existencia y unicidad de la solución periódica.

La solución $x(t, \mu, \beta_0, \beta_1)$, la cual es función analítica de los tres últimos argumentos para valores suficientemente pequeños de los mismos, se busca en

*) Para más detalles sobre los teoremas de la existencia de las soluciones periódicas, consúltese el libro de I. G. Malkin.

la forma

$$x(t, \mu, \beta_0, \beta_1) = x_0(t) + x_{11}(t)\beta_0 + x_{12}(t)\beta_1 + x_{13}(t)\mu + \ldots \quad (2.133)$$

Sustituyendo (2.133) en la ecuación (2.107) y comparando los coeficientes de iguales potencias de μ, β_0 y β_1, se obtienen para la determinación de x_{11} y de x_{12} las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{x}_{11} + a^2 x_{11} = 0, \; x_{11}(0) = 1, \quad \dot{x}_{11}(0) = 0, \\ &\ddot{x}_{12} + a^2 x_{12} = 0, \; x_{12}(0) = 0, \quad \dot{x}_{12}(0) = 1, \end{aligned}\right\} \quad (2.134)$$

(los valores iniciales se obtienen de las condiciones

$$x(t_0, \mu, \beta_0, \beta_1) = x_0(t_0) + \beta_0,$$

$$\dot{x}(t_0, \mu, \beta_0, \beta_1) = \dot{x}_0(t_0) + \beta_1),$$

de donde

$$x_{11} = \cos at, \quad x_{12} = \frac{1}{a} \operatorname{sen} at.$$

Las condiciones de periodicidad (2.132) tienen la forma

$$(\cos 2a\pi - 1)\beta_0 + \frac{1}{a} \operatorname{sen} 2a\pi\beta_1 + \ldots = 0,$$

$$-a \operatorname{sen} 2a\pi\beta_0 + (\cos 2a\pi - 1)\beta_1 + \ldots = 0,$$

donde los términos no escritos no influyen en la magnitud del determinante

$$\frac{D(\Phi_0, \Phi_1)}{D(\beta_0, \beta_1)} \quad \text{cuando} \quad \mu = \beta_0 = \beta_1 = 0.$$

El determinante

$$\left.\frac{D(\Phi_0, \Phi_1)}{D(\beta_0, \beta_1)}\right|_{\mu=\beta_0=\beta_1=0} = (\cos 2a\pi - 1)^2 + \operatorname{sen}^2 2a\pi$$

es diferente de cero, puesto que a no es igual a un número entero.

§ 9. NOCIONES SOBRE PROBLEMAS DE CONTORNO

Como ya se indicó en la introducción, conjuntamente con el problema inicial fundamental, a menudo hay que resolver también los llamados *problemas de contorno*, o *de frontera*. En estos problemas, el valor de la función buscada se da no en uno, sino en dos puntos, los cuales delimitan un segmento, en el que se exige hallar la solución. Por ejemplo, en el problema del movimiento de un punto material de masa m, bajo la acción de una fuerza dada $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, frecuentemente se pide hallar la ley de movimiento, si en el momento inicial $t = t_0$, el punto se encontraba en la posición caracterizada por el radio-vector $\mathbf{r}_0$, y en el momento $t = t_1$ debe hallarse en el punto $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$.

El problema se reduce a la integración de la ecuación diferencial del movimiento

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=\mathbf{F}\left(t,\ \mathbf{r},\ \dot{\mathbf{r}}\right)$$

con las condiciones de frontera $\mathbf{r}(t_0)=\mathbf{r}_0$; $\mathbf{r}(t_1)=\mathbf{r}_1$.

Obsérvese que este problema, en general, no posee una solución única; si se trata de un problema balístico y de puntos en la superficie de la Tierra, entonces el cuerpo puede caer en un mismo punto siguiendo una trayectoria rasa y siguiendo una empinada (fig. 2.3); es más, para grandes velocidades iniciales puede caer en el mismo punto después de una o de varias vueltas alrededor del globo terráqueo.



Fig. 2.3

Un problema de contorno similar se puede establecer también para un rayo de luz que pasa a través de un medio refractante: hallar la dirección por la cual el rayo de luz debe partir del punto A para caer en otro punto dado B.

Aquí es evidente que este problema no siempre tiene solución, y si la tiene, pueden haber varias, y hasta formar un conjunto infinito (por ejemplo, si los rayos que salen de A tienen foco en B).

Si se logra hallar la solución general de la ecuación diferencial del problema de frontera, entonces para la resolución de este problema hay que determinar las constantes arbitrarias que se encuentran en dicha solución, partiendo de las condiciones de frontera. En este caso, claro está, no siempre existe solución real, y si existe, no es necesariamente única.

Como ejemplo de las posibilidades que aquí surgen, consideremos el siguiente problema de contorno:

hallar la solución de la ecuación

$$y''+y=0, \qquad (2.135)$$

que satisface las condiciones: $y(0)=0$, $y(x_1)=y_1$.

La solución general de la ecuación (2.135) tiene la forma

$$y=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen} x.$$

La primera condición de frontera se satisface para $c_1=0$, con lo cual $y=c_2\operatorname{sen} x$.

Si $x_1\neq n\pi$, donde n es entero, entonces de la segunda condición de frontera se halla $y_1=c_2\operatorname{sen} x_1$, $c_2=\frac{y_1}{\operatorname{sen} x_1}$. Por consiguiente,

en este caso existe una solución única del problema de contorno:

$$y=\frac{y_1}{\operatorname{sen} x_1}\operatorname{sen} x.$$

Si, en cambio, $x_1=n\pi$ e $y_1=0$, entonces todas las curvas del haz $y=c_2 \operatorname{sen} x$ son gráficas de las soluciones del problema de contorno.

Cuando $x_1=n\pi$, $y_1\neq 0$, no existen soluciones del problema de contorno, puesto que ni una sola curva del haz $y=c_2\operatorname{sen} x$ pasa por el punto (x_1, y_1), donde

$$x_1=n\pi,\quad y_1\neq 0.$$

Veamos con más detalle los problemas de contorno para las ecuaciones lineales de segundo orden

$$y''+p_1(x)\,y'+p_2(x)\,y=\varphi(x), \tag{2.136}$$

$$y(x_0)=y_0,\ y(x_1)=y_1. \tag{2.137}$$

Mediante la sustitución lineal de las variables

$$z=y-\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)-y_0$$

las condiciones de frontera (2.137) se reducen a las condiciones nulas $z(x_0)=z(x_1)=0$, y además la linealidad de (2.136) no se altera.

Multiplicando por $e^{\int p_1(x)\,dx}$, la ecuación lineal (2.136) se reduce a la forma

$$\frac{d}{dx}(p(x)\,y')+q(x)\,y=f(x), \tag{2.138}$$

donde $p(x)=e^{\int p_1(x)\,dx}$. Por ello, sin limitar sustancialmente la generalidad, se puede sustituir el estudio del problema de frontera (2.136), (2.137) por el estudio del problema de frontera para la ecuación (2.138), con las condiciones iniciales

$$y(x_0)=y(x_1)=0. \tag{2.139}$$

Consideremos previamente el problema de frontera (2.138), (2.139), cuando $f(x)$ es función con impulso igual a la unidad, localizada en el punto $x=s$. Más exactamente, consideremos la ecuación

$$\frac{d}{dx}(p(x)\,y')+q(x)\,y=f_\varepsilon(x,\ s) \tag{2.140}$$

con condiciones de frontera $y(x_0)=y(x_1)=0$, donde la función $f_\varepsilon(x, s)$ es igual a cero en todo el segmento $[x_0, x_1]$, con excep-

ción del ε-segmento del punto $x=s$, $s-\varepsilon<x<s+\varepsilon$, y además

$$\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} f_\varepsilon(x, s)\,dx=1.$$

Denotemos por $G_\varepsilon(x, s)$ la solución continua de este problema de frontera y pasemos al límite cuando $\varepsilon\to 0$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} G_\varepsilon(x, s)=G(x, s). \qquad (2.141)$$

No sería difícil demostrar la existencia de este límite, el cual no depende de la elección de la función $f_\varepsilon(x, s)$; sin embargo no hay necesidad de ello, ya que por ahora nuestros razonamientos son de carácter general, y en la pág. 166 se dará una definición exacta de la función $G(x, s)$.

La función $G(x, s)$ se llama *función de influencia o función de Green* del problema de frontera considerado. Al igual que en las págs. 126—127 la solución del problema de contorno (2.138), (2.139) de segundo miembro continuo en (2.138) se puede considerar como superposición de las soluciones de los problemas de contorno que corresponden a funciones localizadas en un punto, con impulsos $f(s_i)\Delta s$, donde s_i son los puntos de división del segmento $[x_0, x_1]$ en m partes iguales, $\Delta s=\frac{x_1-x_0}{m}$. Más exactamente, la solución aproximada del problema de contorno (2.138), (2.139) es igual a la suma integral

$$\sum_{i=1}^{m} G(x, s_i)f(s_i)\Delta s,$$

y el límite de esta suma cuando $m\to\infty$:

$$y(x)=\int_{x_0}^{x_1} G(x, s)f(s)\,ds \qquad (2.142)$$

es solución del problema de contorno considerado (2.138), (2.139).

El sentido físico de la función de influencia $G(x, s)$ y de la solución (2.142) se aclara aún más, si en la ecuación (2.140) se considera $y(x)$ como el desplazamiento de cierto sistema bajo la influencia de la fuerza $f(x)$, distribuida continuamente en el segmento $[x_0, x_1]$ (por ejemplo, la desviación de un hilo de la posición de equilibrio bajo la acción de una carga distribuida con densidad $f(x)$). En este caso $G(x, s)$ describe el desplazamiento originado por la fuerza unitaria localizada, aplicada en el punto $x=s$; la solución (2.142) se considera como el límite de la suma de las soluciones correspondientes a las fuerzas localizadas.

La función de Green posee las siguientes propiedades, que surgen de su definición (2.141):

1. $G(x, s)$ es continua en x para s fija cuando $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, $x_0 < s < x_1$.

2. $G(x, s)$ es solución de la ecuación homogénea correspondiente

$$\frac{d}{dx}(p(x)\,y') + q(x)\,y = 0$$

en todo el segmento $[x_0, x_1]$, a excepción del punto $x = s$ (ya que fuera de este punto, en el caso en que la función está localizada en el punto $x = s$, el segundo miembro es nulo).

3. $G(x, s)$ satisface las condiciones de frontera:

$$G(x_0, s) = G(x_1, s) = 0.$$

4. En el punto $x = s$ la derivada $G'_x(x, s)$ debe tener discontinuidad de primera especie con salto $\frac{1}{p(s)}$. En efecto, es de esperar discontinuidad sólo en el punto de localización de la función, en el punto $x = s$. Multiplicando la identidad

$$\frac{d}{dx}(p(x)\,G'_\varepsilon(x, s)) + q(x)\,G_\varepsilon(x, s) \equiv f_\varepsilon(x, s)$$

por dx e integrando desde $s-\varepsilon$ hasta $s+\varepsilon$, se obtiene

$$p(x)\,G'_\varepsilon(x, s)\Big|_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} + \int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} q(x)\,G_\varepsilon(x, s)\,dx = 1$$

y pasando al límite cuando $\varepsilon \to 0$, tendremos

$$[G'(s+0, s) - G'(s-0, s)] = \frac{1}{p(s)}.$$

Todos nuestros razonamientos sobre la función de Green han sido de carácter general. Démosle ahora la exactitud necesaria.

Definición. *Se llama función de Green $G(x, s)$ del problema de frontera* (2.138), (2.139) *a la función que satisface las condiciones* 1), 2), 3) *y* 4).

Por sustitución directa en la ecuación (2.138), se comprueba que

$$y(x) = \int_{x_0}^{x_1} G(x, s)\,f(s)\,ds \tag{2.142}$$

es solución de esta ecuación (las condiciones de frontera (2.139) se satisfacen evidentemente, debido a la propiedad 3)).

En efecto,

$$y'(x)=\int_{x_0}^{x_1} G'_x(x, s) f(s)\,ds=\int_{x_0}^{x} G'_x(x, s) f(s)\,ds+\int_{x}^{x_1} G'_x(x, s) f(s)\,ds;$$

$$y''(x)-\int_{x_0}^{x} G''_{xx}(x, s) f(s)\,ds=G'_x(x, x-0) f(x)+$$

$$+\int_{x}^{x_1} G''_{xx}(x, s) f(s)\,ds-G'_x(x, x+0) f(x)=$$

$$=\int_{x_0}^{x_1} G''_{xx}(x, s) f(s)\,ds+[G'_x(x+0, x)-G'_x(x-0, x)]\,f(x).$$

Sustituyendo (2.142) en la ecuación (2.138), se obtiene

$$\int_{x_0}^{x_1} [p(x)\,G''_{xx}(x, s)+p'(x)\,G'_x(x, s)+q(x)\,G(x, s)\,dx+$$

$$+p(x)\,[G'_x(x+0, x)-G'_x(x-0, x)]\,f(x)\equiv f(x),$$

debido a las condiciones 2) y 4).

Estudiemos un método de construcción de la función de Green, del cual obtendremos a la vez una condición suficiente para su existencia.

Tomemos la solución $y_1(x)$ de la ecuación

$$\frac{d}{dx}(p(x)\,y')+q(x)\,y=0, \tag{2.143}$$

determinada por las condiciones iniciales

$$y(x_0)=0, \quad y'(x_0)=y'_0\neq 0.$$

Esta solución, en general, no satisface la segunda condición de frontera $y(x_1)\neq 0$. El caso $y(x_0)=y(x_1)=0$ es excepcional, y aquí no será estudiado.

Es evidente que las soluciones $c_1y_1(x)$, donde c_1 es una constante arbitraria, satisfacen también la condición de frontera $y(x_0)=0$. Análogamente se halla la solución no trivial $y_2(x)$ de la ecuación (2.143), que satisface la segunda condición de frontera $y_2(x_1)=0$; a esta misma condición la satisfacen todas las soluciones de la familia $c_2y_2(x)$, donde c_2 es una constante arbitraria.

Buscamos la función de Green en la forma

$$G(x, s)=\begin{cases} c_1y_1(x), & \text{si } x_0\leqslant x\leqslant s,\\ c_2y_2(x), & \text{si } s\leqslant x\leqslant x_1,\end{cases}$$

y las constantes c_1 y c_2 las escogemos de manera que se cumplan

las condiciones 1) y 4), o sea, que la función $G(x, s)$ sea continua en x para s fija y, en particular, continua en el punto $x=s$:

$$c_1 y_1(s) = c_2 y_2(s), \tag{2.144}$$

y que $G'_x(x, s)$ tenga en el punto $x=s$ el salto $\frac{1}{p(s)}$:

$$c_2 y'_2(s) - c_1 y'_1(s) = \frac{1}{p(s)}. \tag{2.145}$$

Como se considera $y_1(x_1) \neq 0$, las soluciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son linealmente independientes, ya que todas las soluciones linealmente dependientes de $y_1(x)$ tienen la forma $c_1 y_1(x)$ y, por consiguiente, cuando $c_1 \neq 0$ no son iguales a cero en el punto x_1 en el cual se hace cero la solución $y_2(x)$. Por lo tanto, el determinante del sistema (2.144) y (2.145), que es el wronskiano $W(y_1(x), y_2(x)) = W(x)$ en el punto $x=s$, es diferente de cero, y las constantes c_1 y c_2 que satisfacen el sistema (2.144) y (2.145) se determinan fácilmente:

$$c_1 = \frac{y_2(s)}{W(s)\,p(s)}, \quad c_2 = \frac{y_1(s)}{W(s)\,p(s)},$$

de donde

$$G(x, s) = \begin{cases} \dfrac{y_2(s)\,y_1(x)}{W(s)\,p(s)} & \text{cuando } x_0 \leqslant x \leqslant s, \\ \dfrac{y_1(s)\,y_2(x)}{W(s)\,p(s)} & \text{cuando } s < x \leqslant x_1. \end{cases} \tag{2.146}$$

Ejemplo. Hallar la función de Green del problema de frontera

$$y''(x) + y(x) = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Las soluciones de la ecuación homogénea correspondiente, que satisfacen las condiciones $y(0)=0$ e $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, tienen respectivamente la forma $y_1 = c_1 \operatorname{sen} x$ e $y_2 = c_2 \cos x$; por lo tanto, en virtud de (2.146),

$$G(x, s) = \begin{cases} -\cos s \operatorname{sen} x & \text{cuando } 0 \leqslant x \leqslant s, \\ -\operatorname{sen} s \cos x & \text{cuando } s < x \leqslant \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Observación. Hemos supuesto (pág. 167) que no existen soluciones no triviales $y(x)$ de la ecuación homogénea (2.143) que satisfagan las condiciones de frontera nulas: $y(x_0) = y(x_1) = 0$. Esta condición garantiza no sólo la existencia y unicidad del problema de frontera (2.138), (2.139), sino también la unicidad de la función de Green.

En efecto, si admitimos la existencia de dos funciones de Green diferentes $G_1(x, s)$ y $G_2(x, s)$ para el problema de frontera (2.138),

(2.139), entonces obtenemos dos soluciones diferentes de este problema:

$$y_1(x)=\int_{x_0}^{x_1} G_1(x, s) f(s)\,ds$$

$$y_2(x)=\int_{x_0}^{x_1} G_2(x, s) f(s)\,ds,$$

la diferencia de las cuales

$$\int_{x_0}^{x_1} [G_1(x, s)-G_2(x, s)] f(s)\,ds$$

será, contrariamente a lo supuesto, una solución no trivial de la ecuación homogénea correspondiente que satisface a las condiciones de frontera nulas.

EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 2

1. $y''-6y'+10y=100$, y cuando $x=0$, se tiene $y=10$, $y'=5$.
2. $\ddot{x}+x=\operatorname{sen} t-\cos 2t$.
3. $y'y'''-3(y'')^2=0$.
4. $y''+y=\dfrac{1}{\operatorname{sen}^3 x}$.
5. $x^2y''-4xy'+6y=2$.
6. $y''+y=\operatorname{ch} x$.
7. $y''+\dfrac{2}{1-y}(y')^2=0$.
8. $\dfrac{d^2x}{dt^2}-4\dfrac{dx}{dt}+4x=e^t+e^{2t}+1$.
9. $(1+x^2)y''+(y')^2+1=0$.
10. $x^3\dfrac{d^2x}{dt^2}+1=0$.
11. $y^{IV}-16y=x^2-e^x$.
12. $(y''')^2+(y'')^2=1$.
13. $\dfrac{d^6x}{dt^6}-\dfrac{d^4x}{dt^4}=1$.
14. $\dfrac{d^4x}{dt^4}-2\dfrac{d^2x}{dt^2}+x=t^2-3$.
15. $y''+4xy=0$; integrar mediante series de potencias.
16. $x^2y''+xy'+\left(9x^2-\dfrac{1}{25}\right)y=0$; integrar reduciendo a una ecuación de Bessel.
17. $y''+(y')^2=1$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.
18. $y''=3\sqrt{y}$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$.
19. $y''+y=1-\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$.
20. $\dfrac{d^2u}{dr^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{du}{dr}=0$.
21. Hallar la velocidad con la cual cierto cuerpo cae sobre la superficie de la Tierra, si se considera que cae desde una altura infinita y que el movimiento se efectúa sólo bajo la acción de la gravedad terrestre. Considerar el radio de la Tierra igual a 6400 km.

22. Hallar la ley del movimiento de un cuerpo que cae sin velocidad inicial, suponiendo que la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad, y que el límite de ésta cuando $t \to \infty$ es 75 m/seg.

23. Una cadena de 6 m de largo se desliza de una mesa. Al comenzar el movimiento pendía de la mesa 1 m de cadena. ¿En cuánto tiempo caerá toda la cadena de la mesa? (Despreciar el rozamiento).

24. Una cadena ha sido tendida por encima de un clavo liso. Al comenzar el movimiento de un lado penden 8 m de cadena, y del otro, 10 m. ¿Dentro de cuánto tiempo se deslizará toda la cadena? (Despreciar el rozamiento.)

25. Un tren se mueve por una vía horizontal. El peso del tren es P, la fuerza de tracción de la locomotora es F, la fuerza de resistencia en pleno movimiento es $W = a + bv$, donde a y b son constantes, y v es la velocidad del tren; s es el trayecto recorrido. Determinar la ley de movimiento del tren, considerando que cuando $t = 0$, $s = 0$ y $v = 0$.

26. Un peso de p kg colgado de un resorte hace que éste se alargue en a cm; después el resorte es alargado en A cm más, y soltado sin velocidad inicial. Hallar la lay de movimiento del resorte, despreciando la resistencia del medio.

27. Dos pesos iguales son colgados en el extremo de un resorte. Hallar la ley de movimiento de uno de los pesos si el otro se desprende. El alargamiento del resorte bajo la acción de un peso es de a cm.

28. Un punto material de masa m se separa del centro O con una fuerza proporcional a la distancia. La resistencia del medio es proporcional a la velocidad de movimiento; hallar la ley de dicho movimiento.

29. Hallar la solución periódica con período 2π de la ecuación

$$\ddot{x} + 2x = f(t),$$

donde la función $f(t) = \pi^2 t - t^3$, para $-\pi < t \leqslant \pi$, y luego se prosigue periódicamente.

30. $yy'' + (y')^2 = \frac{yy'}{\sqrt{1+x^2}}$.

31. $yy'y'' = (y')^3 + (y'')^2$.

32. $\ddot{x} + 9x = t \operatorname{sen} 3t$.

33. $y'' + 2y' + y = \operatorname{sh} x$.

34. $y''' - y = e^x$.

35. $y'' - 2y' + 2y = xe^x \cos x$.

36. $(x^2 - 1)\, y'' - 6y = 1$. Una solución particular de la ecuación homogénea correspondiente tiene forma de polinomio.

37. Hallar la solución $u = u(x^2 + y^2)$ de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

que depende sólo de $x^2 + y^2$.

38. Hallar la solución $u = u(x^2 + y^2 + z^2)$ de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

que es función de $x^2 + y^2 + z^2$.

39. Un punto material se hunde lentamente en un líquido. Hallar la ley de movimiento, considerando que durante una inmersión lenta la resistencia del líquido es proporcional a la velocidad de inmersión.

40. Integrar la ecuación de movimiento $m\ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$, considerando que el segundo miembro es función sólo de x ó de $\dot{x}$:

a) $m\ddot{x} = f(x)$;

b) $m\ddot{x} = f(\dot{x})$.

41. $y^{VI}-3y^{V}+3y^{IV}-y'''=x$.
42. $x^{IV}+2x''+x=\cos t$.
43. $(1+x^2)y''+(1+x)y'+y=2\cos\ln(1+x)$.
44. Determinar la solución periódica de la ecuación

$$\ddot{x}+2\dot{x}+2x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} nt}{n^4}.$$

45. Determinar la solución periódica de la ecuación

$$\ddot{x}+a_1\dot{x}+a_2x=f(t),$$

donde a_1 y a_2 son constantes, y $f(t)$, una función continua periódica de período 2π, que puede ser desarrollada en serie de Fourier, $a_1\neq 0$ y $a_2\neq 0$.

46. $\ddot{x}+3x=\cos t+\mu\dot{x}^2$, μ es un parámetro pequeño. Determinar aproximadamente la solución periódica.

47. $x^2y''-xy'+y=0$; integrar la ecuación si $y_1=x$ es una solución particular.

48. Hallar la ecuación lineal homogénea que posea el siguiente sistema fundamental de soluciones: $y_1=x$, $y_2=\dfrac{1}{x}$.

49. $x^{IV}+x=t^3$.
50. $x=(y'')^3+y''+1$.
51. $\ddot{x}+10\dot{x}+25x=2^t+te^{-5t}$.
52. $xyy''-x(y')^2-yy'=0$.
53. $y^{VI}-y=e^{2x}$.
54. $y^{VI}+2y^{IV}+y''=x+e^x$.
55. $6y''y^{IV}-5(y''')^2=0$.
56. $xy''=y'\ln\dfrac{y'}{x}$.
57. $y''+y=\operatorname{sen} 3x\cos x$.
58. $y''=2y^3$, $y(1)=1$, $y'(1)=1$.
59. $yy''-(y')^2=y'$.

CAPITULO 3

Sistemas de ecuaciones diferenciales

§ 1. CONCEPTOS GENERALES

La ecuación de movimiento de un punto material de masa m, bajo la acción de la fuerza $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, es

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}});$$

proyectando sobre los ejes de coordenadas, ésta puede ser sustituida por un sistema de tres ecuaciones escalares de segundo orden:

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2}&=X(t, x, y, z, \dot{x}\ \dot{y}\ \dot{z}),\\ m\frac{d^2y}{dt^2}&=Y(t, x, y, z, \dot{x}\ \dot{y}, \dot{z}),\\ m\frac{d^2z}{dt^2}&=Z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}),\end{aligned}$$

o por un sistema de seis ecuaciones de primer orden, si consideramos como funciones desconocidas no sólo las coordenadas x, y, z del punto en movimiento, sino también las proyecciones $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ de su velocidad $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$:

$$\begin{aligned} \dot{x}&=u,\\ \dot{y}&=v,\\ \dot{z}&=w;\\ m\dot{u}&=X(t, x, y, z, u, v, w),\\ m\dot{v}&=Y(t, x, y, z, u, v, w),\\ m\dot{w}&=Z(t, x, y, z, u, v, w).\end{aligned}$$

En este caso, por lo general, se dan la posición inicial del punto $x(t_0)=x_0$, $y(t_0)=y_0$, $z(t_0)=z_0$ y la velocidad inicial $u(t_0)=u_0$, $v(t_0)=v_0$, $w(t_0)=w_0$.

Este problema fundamental con valores iniciales ya fue analizado en el § 6 del capítulo 1 (pág. 54). Allí fue demostrado el teorema de existencia y unicidad de la solución del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n), \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

que satisface las condiciones iniciales

$$x_i(t_0) = x_{i0} \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{3.2}$$

Recordemos que las condiciones suficientes para la existencia y unicidad de la solución del sistema (3.1) con las condiciones iniciales (3.2) son:

1) continuidad de todas las funciones f_i en un entorno de las condiciones iniciales;

2) cumplimiento de la condición de Lipschitz para todas las funciones f_i en todos sus argumentos, a partir del segundo, en dicho entorno.

La condición 2) se puede cambiar por una más grosera: la existencia de las derivadas parciales

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad (i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

acotadas en valor absoluto.

La *solución* $x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots,\ x_n(t)$ del sistema de ecuaciones diferenciales es una función vectorial n-dimensional, que denotaremos abreviadamente por $X(t)$. Con esta notación, el sistema (3.1) se puede escribir en la forma

$$\frac{dX}{dt} = F(t,\ X),$$

donde F es una función vectorial con coordenadas $(f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_n)$, y las condiciones iniciales, en la forma $X(t_0) = X_0$, donde X_0 es un vector de n dimensiones con coordenadas $(x_{10},\ x_{20},\ \ldots,\ x_{n0})$.

La solución

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t),\ \ldots,\ x_n = x_n(t),$$

o, más compactamente, $X = X(t)$, del sistema de ecuaciones, determina en el espacio euclidiano de coordenadas $t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$,

cierta curva llamada *curva integral*. Cuando se cumplen las condiciones 1) y 2) del teorema de existencia y unicidad, por cada punto de dicho espacio pasa una sola curva integral, y el conjunto de éstas forma una familia dependiente de n parámetros. Como parámetros de esta familia se pueden tomar, por ejemplo, los valores iniciales $x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}$.

Se puede dar otra interpretación de las soluciones

$$x_1 = x_1(t),\quad x_2 = x_2(t),\ \ldots,\ x_n = x_n(t)$$

o, en forma más compacta, $X = X(t)$, que es particularmente cómoda si los segundos miembros del sistema (3.1) no dependen explícitamente de t.

En el espacio euclidiano con coordenadas rectangulares $x_1, x_2, \ldots, x_n$ la solución $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \ldots, x_n = x_n(t)$ determina la ley de movimiento por cierta trayectoria según la variación del parámetro t, el cual en esta interpretación se considerará como tiempo. Así, la derivada $\frac{dX}{dt}$ será la velocidad de movimiento del punto, y $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dx_2}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}$, las coordenadas de la velocidad de este punto. En esta interpretación, muy natural y cómoda en ciertos problemas físicos y mecánicos, el sistema

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (3.1)$$

o bien

$$\frac{dX}{dt} = F(t, X),$$

se llama generalmente *dinámico*; el espacio de coordenadas $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *espacio de fases*, y la curva $X = X(t)$, *trayectoria de fases*.

El sistema dinámico (3.1) determina en un momento dado t en el espacio $x_1, x_2, \ldots, x_n$ un campo de velocidades. Si la función vectorial F depende explícitamente de t, entonces el campo de velocidades cambia con el tiempo, y las trayectorias de fases pueden intersectarse. Si la función vectorial F o, lo que es lo mismo, todas las funciones f_i no dependen explícitamente de t, el campo de velocidades es estacionario, es decir, no cambia con el tiempo, y el movimiento será permanente.

En el último caso, si las condiciones del teorema de existencia y unicidad se cumplen, por cada punto del espacio de fases $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pasará una sola trayectoria. En efecto, en este caso por cada trayectoria $X = X(t)$ se realizan infinitos movimientos

diferentes $X = X(t+c)$, donde c es una constante arbitraria. Es fácil comprobar esto realizando la sustitución de variables $t_1 = t + c$, con lo cual el sistema dinámico no cambia su forma:

$$\frac{dX}{dt_1} = F(X),$$

por consiguiente, $X = X(t_1)$ será su solución que, expresada en las variables anteriores, será $X = X(t+c)$.

Si por un punto X_0 del espacio de fases, en el caso considerado, pasaran dos trayectorias

$$X = X_1(t) \text{ y } X = X_2(t), \; X_1(\bar{t}_0) = X_2(\bar{\bar{t}}_0) = X_0,$$

entonces, tomando en cada una de ellas el movimiento para el cual el punto X_0 se alcanza en el momento $t = t_0$, o sea, considerando las soluciones

$$X = X_1(t - t_0 + \bar{t}_0) \text{ y } X = X_2(t - t_0 + \bar{\bar{t}}_0),$$

se obtendría una contradicción con el teorema de existencia y unicidad, puesto que las dos soluciones diferentes $X_1(t - t_0 + \bar{t}_0)$ y $X_2(t - t_0 + \bar{\bar{t}}_0)$ satisfarían a la misma condición inicial $X(t_0) = X_0$.

Ejemplo. El sistema de ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x \tag{3.3}$$

posee, como no es difícil comprobar por sustitución directa, la siguiente familia de soluciones:

$$x = c_1 \cos(t - c_2),$$
$$y = -c_1 \operatorname{sen}(t - c_2).$$

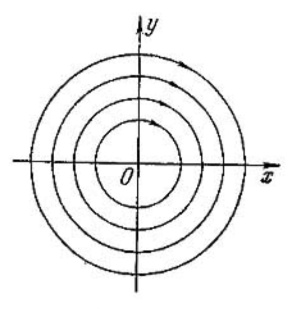


Fig. 3.1

Considerando t como parámetro, obtenemos en el plano de fases x, y una familia de circunferencias con centro en el origen de coordenadas (fig. 3.1). El segundo miembro del sistema (3.3) no depende de t y satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad; por esto, las trayectorias no se cortan. Fijando c_1, obtenemos una trayectoria determinada; además, a diferentes c_2 les corresponden movimientos diferentes por dicha trayectoria. La ecuación de la trayectoria $x^2 + y^2 = c_1^2$ no depende de c_2, por lo que todos los movimientos para un c_1 fijo se realizan por una misma trayectoria. Cuando $c_1 = 0$, la trayectoria de fases se compone de un punto, llamado en este caso *punto de reposo* del sistema (3.3).

§ 2. INTEGRACION DE UN SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES POR REDUCCION A UNA SOLA ECUACION DE MAYOR ORDEN

Uno de los métodos fundamentales de integración de sistemas de ecuaciones diferenciales consiste en lo siguiente: de las ecuaciones del sistema (3.1) y de las ecuaciones obtenidas derivando éstas, se excluyen todas las funciones desconocidas, excepto una, para cuya determinación se obtiene una ecuación diferencial de orden mayor. Integrando dicha ecuación, se halla una de las funciones desconocidas. Las funciones desconocidas restantes se determinan, en lo posible sin integración, partiendo de las ecuaciones originales y de las obtenidas por derivación.

Veamos algunos ejemplos para ilustrar lo antedicho.

Ejemplo 1.

$$\frac{dx}{dt}=y, \quad \frac{dy}{dt}=x.$$

Derivemos una de las ecuaciones, por ejemplo, la primera, $\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dy}{dt}$; eliminando $\frac{dy}{dt}$ mediante la segunda ecuación, se obtiene $\frac{d^2x}{dt^2}-x=0$, de donde $x=c_1e^t+$ $+c_2e^{-t}$. Utilizando la primera ecuación, obtenemos $y=\frac{dx}{dt}=c_1e^t-c_2e^{-t}$.

Hemos determinado y sin integrar, mediante la primera ecuación. Si hubiéramos determinado y de la segunda ecuación,

$$\frac{dy}{dt}=x=c_1e^t+c_2e^{-t}, \quad y=c_1e^t-c_2e^{-t}+c_3,$$

entonces habríamos introducido soluciones superfluas, puesto que la sustitución directa en el sistema original muestra que las funciones $x=c_1e^{-t}+c_2e^{-t}$ e $y=c_1e^t-$ $-c_2e^{-t}+c_3$ satisfacen al sistema no para c_3 cualesquiera, sino para $c_3=0$.

Ejemplo 2.

$$\frac{dx}{dt}=3x-2y, \tag{3.4$_1$}$$

$$\frac{dy}{dt}=2x-y. \tag{3.4$_2$}$$

Derivemos la segunda ecuación:

$$\frac{d^2y}{dt^2}=2\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}. \tag{3.5}$$

De las ecuaciones (3.4$_2$) y (3.5) se determinan x y $\frac{dx}{dt}$:

$$x=\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dt}+y\right), \tag{3.6}$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\right).$$

Sustituyendo en (3.4_1), obtenemos

$$\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+y=0.$$

Integrando la ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes $y=e^t(c_1+c_2t)$ y sustituyendo en (3.6), se halla $x(t)$:

$$x=\frac{1}{2}e^t(2c_1+c_2+2c_2t).$$

Ejemplo 3.

$$\frac{d^2x}{dt^2}=y,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=x.$$

Derivando la primera ecuación, obtenemos $\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d^4x}{dt^4}$, y sustituyendo en la segunda ecuación, se tiene $\frac{d^4x}{dt^4}=x$. Integrando esta ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes, obtenemos

$$x=c_1e^t+c_2e^{-t}+c_3\cos t+c_4\operatorname{sen} t,$$

y sustituyendo en la primera ecuación, se halla

$$y=c_1e^t+c_2e^{-t}-c_3\cos t-c_4\operatorname{sen} t.$$

Describamos más exactamente el proceso de eliminación de todas las funciones incógnitas, excepto una, del sistema.

Demostremos previamente que una de las funciones desconocidas, por ejemplo $x_1(t)$, que figura en la solución $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ del sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n),\\ \frac{dx_2}{dt}&=f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{dx_n}{dt}&=f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n),\end{aligned}\right\}\qquad(3.1)$$

satisface cierta ecuación de n-ésimo orden. Consideraremos en este caso que todas las funciones f_i poseen derivadas parciales continuas respecto a todos los argumentos, de hasta $(n-1)$-ésimo orden inclusive. Al poner en el sistema (3.1) cierta solución $x_1(t)$, $x_2(t)$, $\ldots$, $x_n(t)$, todas las ecuaciones de éste se reducen a identidades. En particular, la primera ecuación

$$\frac{dx_1}{dt}=f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

del sistema también se reduce a una identidad,

Derivando esta identidad con respecto a t:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=\frac{\partial f_1}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\cdot\frac{dx_i}{dt},$$

o bien

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=\frac{\partial f_1}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_1}{\partial x_i}f_i, \qquad (3.7_2^a)$$

y designando el segundo miembro de la última identidad por $F_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, obtenemos

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=F_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (3.7_2^b)$$

Derivando nuevamente esta identidad:

$$\frac{d^3x_1}{dt^3}=\frac{\partial F_2}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_2}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt},$$

o bien

$$\frac{d^3x_1}{dt^3}=\frac{\partial F_2}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_2}{\partial x_i}f_i, \qquad (3.7_3^a)$$

y designando el segundo miembro de la última identidad por $F_3(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, obtenemos:

$$\frac{d^3x_1}{dt^3}=F_3(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (3.7_3^b)$$

Derivando una vez más esta identidad, y continuando este proceso $n-2$ veces, obtenemos por último la identidad

$$\frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}=F_{n-1}(t, x_1, x_2, \ldots, x_n); \qquad (3.7_{n-1}^b)$$

derivándola y utilizando las identidades (3.1), tendremos:

$$\frac{d^nx_1}{dt^n}=F_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

De esta manera, hemos obtenido $n-1$ identidades

$$\left.\begin{array}{ll}\dfrac{dx_1}{dt}=f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), & (3.7_1)\\ \dfrac{d^2x_1}{dt^2}=F_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), & (3.7_2)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \dfrac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}=F_{n-1}(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) & (3.7_{n-1})\end{array}\right\} \qquad (3.7)$$

y además la identidad

$$\frac{d^n x_1}{dt^n} = F_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (3.8)$$

Supongamos que el determinante es

$$\frac{D(f_1, F_2, F_3, \ldots, F_{n-1})}{D(x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n)} \neq 0$$

en la región considerada de variación de las variables. Entonces el sistema (3.7) se puede resolver respecto a $x_2, x_3, \ldots, x_n$, expresándolas mediante las variables $t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}$. Sustituyendo en la última ecuación (3.8) las variables $x_2, x_3, \ldots, x_n$ halladas del sistema (3.7), obtenemos la ecuación de n-ésimo orden

$$\frac{d^n x_1}{dt^n} = \Phi\left(t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}\right), \qquad (3.8_1)$$

a la cual satisface la función $x_1(t)$, que era, por hipótesis, la primera función $x_1(t)$ de la solución $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ del sistema (3.1).

Demostremos ahora que si se toma cualquier solución $x_1(t)$ de la ecuación de n-ésimo orden obtenida (3.8_1), se sustituye en el sistema (3.7) y se determinan de éste $x_2(t), x_3(t), \ldots, x_n(t)$, entonces el sistema de funciones

$$x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t) \qquad (3.9)$$

será solución del sistema (3.1).

Sustituyendo el sistema de funciones hallado (3.9) en el sistema (3.7), todas las ecuaciones de éste se reducen a identidades; en particular, se obtiene la identidad

$$\frac{dx_1}{dt} \equiv f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (3.7_1)$$

Derivándola con respecto a t, tendremos:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}. \qquad (3.10)$$

En esta identidad, por ahora, no es posible sustituir $\frac{dx_i}{dt}$ por las funciones f_i, ya que aún no hemos demostrado que las funciones obtenidas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ por el método expuesto anteriormente, partiendo de la ecuación (3.8) y del sistema (3.7), satisfacen el sistema (3.1). Es más, precisamente esta afirmación constituye la finalidad de nuestra demostración.

Restando miembro a miembro la identidad (3.7_2) de la identidad (3.10), tomada en la forma desarrollada (3.7_2^a), obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}\left(\frac{dx_i}{dt}-f_i\right) \equiv 0,$$

o bien, debido a (3.7_1),

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}\left(\frac{dx_i}{dt}-f_i\right) \equiv 0.$$

En forma completamente análoga, derivando la identidad (3.7_2) y restándole (3.7_3^a), derivando luego (3.7_3) y restándole (3.7_4^a), ets., obtenemos:

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{\partial F_2}{\partial x_i}\left(\frac{dx_i}{dt}-f_i\right) = 0.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{i=2} \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_i}\left(\frac{dx_i}{dt}-f_i\right) = 0.$$

Como el determinante del sistema de ecuaciones lineal homogéneo

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=2}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}\left(\frac{dx_i}{dt}-f_i\right) = 0,\\ &\sum_{i=2}^{n} \frac{\partial F_2}{\partial x_i}\left(\frac{dx_i}{dt}-f_i\right) = 0,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\sum_{i=2}^{n} \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_i}\left(\frac{dx_i}{dt}-f_i\right) = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (3.11)$$

formado por $n-1$ ecuaciones y con $n-1$ incógnitas $\left(\frac{dx_i}{dt}-f_i\right)$ $(i=2, 3, \ldots, n)$, coincide con el determinante funcional diferente de cero

$$\frac{D(f_1, F_2, \ldots, F_{n-1})}{D(x_2, x_3, \ldots, x_n)} \neq 0,$$

el sistema (3.11) en cada punto de la región considerada tiene sólo soluciones triviales:

$$\frac{dx_i}{dt}-f_i \equiv 0 \quad (i=2, 3, \ldots, n).$$

Tomando en cuenta además (3.7_1), obtenemos que las n funciones $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son soluciones del sistema de ecuaciones

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Observación 1. El proceso indicado aquí de elminación de todas las funciones, con excepción de una, presupone que

$$\frac{D(f_1, F_2, \ldots, F_{n-1})}{D(x_2, x_3, \ldots, x_n)} \neq 0. \qquad (3.12)$$

Si esta condición no se cumple, se puede utilizar el mismo proceso, pero en lugar de la función x_1, tomar cualquier función de las $x_2, x_3, \ldots, x_n$, que forman la solución del sistema (3.1). Si la condición (3.12) no se cumple al escoger cualquier función de las $x_2, x_3, \ldots, x_n$ en lugar de x_1, entonces son posibles diferentes casos excepcionales, que ilustraremos con los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4.

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_2),$$

$$\frac{dx_3}{dt} = f_3(t, x_3).$$

El sistema se descompone en ecuaciones completamente independientes entre sí, cada una de las cuales debe integrarse por separado.

Ejemplo 5.

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_2, x_3), \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \neq 0,$$

$$\frac{dx_3}{dt} = f_3(t, x_2, x_3).$$

Las dos últimas ecuaciones se pueden reducir a una ecuación de segundo orden por el método señalado anteriormente; pero la primera ecuación, que contiene la función desconocida x_1, la cual no figura en las ecuaciones restantes, debe ser integrada por separado.

Observación 2. Si aplicamos el proceso de eliminación indicado anteriormente al sistema

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\, x_j \quad (i=1, 2, \ldots, n),$$

llamado lineal homogéneo, entonces, como es fácil comprobar, la ecuación de n-ésimo orden

$$\frac{d^n x_1}{dt^n} = \Phi\left(t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1} x_1}{dt^{n-1}}\right) \qquad (3.8_1)$$

también será lineal homogénea. Además, si todos los coeficientes a_{ij} son constantes, la ecuación (3.8_1) será también lineal homogénea con coeficientes constantes. Una observación análoga se cumple también para el sistema lineal no homogéneo

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j + f_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

para el cual la ecuación (3.8_1) será una ecuación lineal no homogénea de n-ésimo orden.

§ 3. DETERMINACION DE LAS COMBINACIONES INTEGRABLES

La integración del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (3.1)$$

se realiza frecuentemente escogiendo las llamadas combinaciones integrables.

Se llama *combinación integrable* a una ecuación diferencial que es consecuencia de las ecuaciones (3.1), pero que se integra con facilidad; por ejemplo, que es de la forma

$$d\Phi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

o que es una ecuación que se reduce, mediante cambio de variables, a cualquier tipo integrable de ecuaciones con una función desconocida.

Ejemplo 1

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x.$$

Sumando miembro a miembro estas ecuaciones, se halla la combinación integrable

$$\frac{d(x+y)}{dt} = x + y, \text{ o bien } \frac{d(x+y)}{x+y} = dt,$$

de donde

$$\ln|x+y| = t + \ln c_1, \quad x + y = c_1 e^t.$$

Restando miembro a miembro la segunda ecuación de la primera, obtenemos la segunda combinación integrable

$$\frac{d(x-y)}{dt} = -(x-y), \text{ o bien } \frac{d(x-y)}{x-y} = -dt,$$

$$\ln|x-y| = -t + \ln c_2, \quad x - y = c_2 e^{-t}.$$

De este modo, hemos hallado dos ecuaciones finitas *):

$$x+y=c_1e^t \quad \text{y} \quad x-y=c_2e^{-t},$$

a partir de las cuales se puede determinar la solución del sistema original:

$$x=\frac{1}{2}(c_1e^t+c_2e^{-t}), \quad y=\frac{1}{2}(c_1e^t-c_2e^{-t}),$$

o bien

$$x=\bar{c}_1e^t+\bar{c}_2e^{-t}, \quad y=\bar{c}_1e^t-\bar{c}_2e^{-t}.$$

Una combinación integrable permite obtener una ecuación finita

$$\Phi_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)=c_1,$$

que relaciona las funciones desconocidas y la variable independiente. Tal ecuación se llama *primera integral del sistema* (3.1).

De esta manera, se llama primera integral

$$\Phi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)=c \qquad (3.13)$$

del sistema de ecuaciones (3.1) a una ecuación finita que se reduce a una identidad para cierto valor de c, si en lugar de $x_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, se sustituye la solución del sistema (3.1).

Con frecuencia también se llama primera integral al primer miembro $\Phi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de la ecuación (3.13), y entonces la primera integral se determina como una función no idénticamente igual a una constante, pero que conserva su valor constante a lo largo de las curvas integrales del sistema (3.1).

Geométricamente, la primera integral $\Phi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)=c$ puede ser interpretada, para una c fija, como una superficie n-dimensional en el espacio de $n-1$ dimensiones, de coordenadas $t, x_1, x_2, \ldots, x_n$, que posee la propiedad de que cada curva integral que tiene un punto común con esta superficie está enteramente contenido en ella. Cuando c es una variable, obtenemos una familia de superficies que no se cortan, y que poseen la misma propiedad, es decir, que están compuestas por puntos de cierta familia de curvas integrales del sistema (3.1), dependiente de $n-1$ parámetros.

Si se han hallado k combinaciones integrables, entonces se obtienen k primeras integrales:

$$\left.\begin{array}{l}\Phi_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)=c_1,\\ \Phi_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)=c_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \Phi_k(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)=c_k.\end{array}\right\} \qquad (3.14)$$

*) Véase la nota al pie de la pág. 22 (*N. de la Red.*)

Si todas estas integrales son independientes, o sea, si al menos un determinante

$$\frac{D(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_k)}{D(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_k})} \neq 0,$$

donde $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_k}$ son k funciones cualesquiera de las $x_1, x_2, \ldots, x_n$, entonces a partir del sistema (3.14) se pueden expresar k funciones desconocidas mediante las demás y, sustituyéndolas en el sistema (3.1), reducir el problema a la integración de un sistema de ecuaciones con una cantidad menor de incógnitas. Si $k=n$ y todas las integrales son independientes, todas las funciones desconocidas se determinan a partir del sistema (3.14).

Ejemplo. 2.

$$\frac{dx}{dt}=y-z, \quad \frac{dy}{dt}=z-x, \quad \frac{dz}{dt}=x-y.$$

Sumando miembro a miembro las ecuaciones de este sistema, obtenemos

$$\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}+\frac{dz}{dt}=0, \text{ o bien } \frac{d}{dt}(x+y+z)=0,$$

de donde

$$x+y+z=c_1.$$

Esta primera integral hallada permite expresar una de las funciones desconocidas mediante las demás variables, y con ello reducir el problema a la integración de un sistema de dos ecuaciones con dos funciones incógnitas. Sin embargo, en este caso es fácil hallar otra primera integral. Multiplicando la primera ecuación por x, la segunda por y, la tercera por z y sumando, resulta

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}=0,$$

o bien, multiplicando por 2, obtenemos

$$\frac{d}{dt}(x^2+y^2+z^2)=0,$$

de donde

$$x^2+y^2+z^2=c_2.$$

Partiendo de estas dos primeras integrales halladas se pueden expresar dos funciones desconocidas mediante las demás variables, reduciéndose el problema a la integración de una ecuación con una función incógnita.

Ejemplo 3.

$$A\frac{dp}{dt}=(B-C)qr, \quad B\frac{dq}{dt}=(C-A)rp, \quad C\frac{dr}{dt}=(A-B)pq,$$

donde A, B y C son constantes (este sistema se encuentra en la teoría del movimiento de un cuerpo rígido). Multiplicando la primera ecuación por p, la segunda por q, la tercera por r y sumando, se obtiene

$$Ap\frac{dp}{dt}+Bq\frac{dq}{dt}+Cr\frac{dr}{dt}=0,$$

de donde se halla la primera integral

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = c_1.$$

Multiplicando la primera ecuación por Ap, la segunda por Bq, la tercera por Cr y sumando, tendremos

$$A^2p\frac{dp}{dt} + B^2q\frac{dq}{dt} + C^2r\frac{dr}{dt} = 0,$$

e integrando, obtenemos otra primera integral

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = c_2.$$

Si se excluye el caso $A = B = C$, para el cual el sistema se integra directamente, las primeras integrales halladas serán independientes y, por lo tanto, utilizando éstas se pueden eliminar dos funciones desconocidas. Además, para determinar la tercera función se obtiene una ecuación con variables separables.

Para hallar las combinaciones integrables con frecuencia es más cómodo pasar a la llamada forma simétrica de escritura del sistema de ecuaciones (3.1):

$$\frac{dx_1}{\varphi_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{\varphi_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \ldots$$
$$\ldots = \frac{dx_n}{\varphi_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{dt}{\varphi_0(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)}, \qquad (3.15)$$

donde

$$f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\varphi_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\varphi_0(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

En un sistema dado en forma simétrica, las variables son equivalentes, lo cual con frecuencia facilita la búsqueda de las combinaciones integrables.

Ejemplo 4.

$$\frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}. \qquad (3.16)$$

Integrando la ecuación

$$\frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz},$$

hallamos $\frac{y}{z} = c_1$. Multiplicando los numeradores y los denominadores de la primera razón del sistema (3.16) por x, la segunda por y, la tercera por z y formando la proporción compuesta, obtenemos

$$\frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{x(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{dy}{2xy},$$

de donde

$$\ln(x^2 + y^2 + z^2) = \ln|y| + \ln c_2,$$

o bien

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{y}=c_2.$$

Las primeras integrales independientes halladas

$$\frac{y}{z}=c_1 \quad \text{y} \quad \frac{x^2+y^2+z^2}{y}=c_2$$

determinan las curvas integrales buscadas.

§ 4. SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

Un sistema de ecuaciones diferenciales se llama *lineal*, si es lineal con respecto a todas las funciones desconocidas y a sus derivadas. El sistema de n ecuaciones lineales de primer orden, escrito en la forma normal, es

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\,x_j+f_i(t) \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{3.17}$$

o, en forma vectorial,

$$\frac{dX}{dt}=AX+F, \tag{3.18}$$

donde X es un vector n-dimensional de coordenadas $x_1(t)$, $x_2(t)$, $\ldots$, $x_n(t)$; F es un vector n-dimensional de coordenadas $f_1(t)$, $f_2(t)$, $\ldots$, $f_n(t)$. Es conveniente en lo sucesivo representar dichos vectores como matrices de una columna:

$$X=\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{Vmatrix}, \quad F=\begin{Vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{Vmatrix},$$

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}, \quad \frac{dX}{dt}=\begin{Vmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{dx_n}{dt} \end{Vmatrix}.$$

Según la regla del producto de matrices, las filas del primer factor deben multiplicarse por la columna del segundo: por lo tanto,

$$AX=\begin{Vmatrix}\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j\\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j\end{Vmatrix},\quad AX+F=\begin{Vmatrix}\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j+f_1\\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j+f_2\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j+f_n\end{Vmatrix}.$$

La igualdad de matrices significa la igualdad de todos sus elementos, por lo cual una sola ecuación matricial (3.18), o bien

$$\begin{Vmatrix}\frac{dx_1}{dt}\\ \frac{dx_2}{dt}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \frac{dx_n}{dt}\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j+f_1\\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j+f_2\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j+f_n\end{Vmatrix}$$

es equivalente al sistema (3.17).

Si todas las funciones $a_{ij}(t)$ y $f_i(t)$ en (3.17) son continuas en el segmento $a\leqslant t\leqslant b$, entonces en un entorno suficientemente pequeño de cada punto $(t_0, x_{10}\ x_{20}, \ldots, x_{n0})$, donde $a\leqslant t_0\leqslant b$, se cumplen las condiciones del teorema de existencia y unicidad (véase la pág. 173) y, en consecuencia, por cada punto con estas propiedades pasa una sola curva integral del sistema (3.17).

En efecto, en el caso considerado los segundos miembros del sistema (3.17) son continuos, y sus derivadas parciales con respecto a cualquier x_j son acotadas, puesto que dichas derivadas son iguales a los coeficientes $a_{ij}(t)$, continuos en el segmento $a\leqslant t\leqslant b$.

Definamos el *operador lineal* L por la igualdad

$$L[X]=\frac{dX}{dt}-AX;$$

entonces la ecuación (3.18) puede escribirse en la forma aún más compacta

$$L[X]=F. \tag{3.19}$$

Si todas las $f_i(t)\equiv 0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ o, lo que es lo mismo, la matriz $F=0$, el sistema (3.17) se llama *lineal homogéneo*. En forma compacta, el sistema lineal homogéneo tiene la forma

$$L[X]=0. \tag{3.20}$$

El operador L posee las dos propiedades siguientes:

1) $L[cX] \equiv cL[X]$,

donde c es una constante arbitraria.

2) $L[X_1+X_2] \equiv L[X_1]+L[X_2]$.

En efecto,

$$\frac{d(cX)}{dt}-A(cX) \equiv c\left[\frac{dX}{dt}-AX\right],$$

$$\frac{d(X_1+X_2)}{dt}-A(X_1+X_2) \equiv \left(\frac{dX_1}{dt}-AX_1\right)+\left(\frac{dX_2}{dt}-AX_2\right).$$

Un corolario de 1) y 2) es

$$L\left[\sum_{i=1}^{m} c_i X_i\right] \equiv \sum_{i=1}^{m} c_i L[X_i],$$

donde las c_i son constantes arbitrarias.

Teorema 3.1. *Si X es solución del sistema lineal homogéneo $L[X]=0$, entonces cX, donde c es una constante arbitraria, es también solución de dicho sistema.*

Demostración. Dado $L[X] \equiv 0$, hay que demostrar que $L[cX] \equiv 0$.

Aplicando la propiedad 1) del operador L, obtenemos

$$L[cX] \equiv cL[X] \equiv 0.$$

Teorema 3.2. *La suma X_1+X_2 de dos soluciones X_1 y X_2 del sistema de ecuaciones lineal homogéneo es solución de dicho sistema.*

Demostración. Dado $L[X_1] \equiv 0$ y $L[X_2] \equiv 0$, hay que demostrar que $L[X_1+X_2] \equiv 0$.

Aplicando la propiedad 2) del operador L, se obtiene

$$L[X_1+X_2] \equiv L[X_1]+L[X_2] \equiv 0.$$

Corolario de los teoremas 3.1 y 3.2. *La combinación lineal $\sum_{i=1}^{m} c_i X_i$ de las soluciones $X_1, X_2, \ldots, X_m$ del sistema $L[X] \equiv 0$ con coeficientes constantes arbitrarios es solución de dicho sistema.*

Teorema 3.3. *Si el sistema lineal homogéneo (3.20) con coeficientes reales $a_{ij}(t)$ tiene una solución compleja $X=U+iV$, las partes real e imaginaria*

$$U=\begin{Vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{Vmatrix} \quad \text{y} \quad V=\begin{Vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{Vmatrix}$$

son por separado soluciones de dicho sistema.

Demostración. Dado $L[U+iV]\equiv 0$, hay que demostrar que

$$L[U]\equiv 0 \quad \text{y} \quad L[V]\equiv 0.$$

Aplicando las propiedades 1) y 2) del operador L, se obtiene

$$L[U+iV]\equiv L[U]+iL[V]\equiv 0.$$

Por consiguiente, $L[U]\equiv 0$ y $L[V]\equiv 0$.

Los vectores $X_1, X_2, \ldots, X_n$, donde

$$X_i=\begin{Vmatrix} x_{1i}(t) \\ x_{2i}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{ni}(t) \end{Vmatrix},$$

se llaman *linealmente dependientes* en el segmento $a\leqslant t\leqslant b$, si existen las constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tales que

$$\alpha_1X_1+\alpha_2X_2+\ldots+\alpha_nX_n\equiv 0 \tag{3.21}$$

cuando $a\leqslant t\leqslant b$, y al menos un $\alpha_i\neq 0$. Si, en cambio, la identidad (3.21) se cumple sólo cuando $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$, entonces los vectores $X_1, X_2, \ldots, X_n$ se llaman *linealmente independientes*.

Obsérvese que la identidad vectorial (3.21) es equivalente a las n identidades:

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_{1i}(t)\equiv 0, \\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_{2i}(t)\equiv 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_{ni}(t)\equiv 0. \end{array}\right\} \tag{3.21$_1$}$$

Si los vectores X_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ son linealmente dependientes y, por lo tanto, existe un sistema no trivial α_i (es decir, no todas las α_i son iguales a cero) que satisface al sistema (3.21$_1$) de n ecuaciones lineales homogéneas con respecto a α_i, entonces el determinante del sistema (3.21$_1$)

$$W=\begin{Vmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{Vmatrix}$$

debe ser igual a cero para todos los valores de t del segmento $a\leqslant t\leqslant b$. Este determinante se llama *wronskiano* del sistema de vectores $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Teorema 3.4. *Si el wronskiano W de las soluciones $X_1, X_2, \ldots, X_n$ del sistema de ecuaciones lineal homogéneo (3.20) con coeficientes continuos $a_{ij}(t)$ en el segmento $a \leqslant t \leqslant b$, es igual a cero por lo menos en un punto $t = t_0$ de dicho segmento, entonces las soluciones $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son linealmente dependientes en el segmento mencionado y, por consiguiente, $W \equiv 0$ en dicho segmento.*

Demostración. Como los coeficientes $a_{ij}(t)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ son continuos, el sistema (3.20) satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad. Por lo tanto, las condiciones iniciales $X(t_0) = 0$ (o, más detalladamente, $x_1(t_0) = 0, x_2(t_0) = 0, \ldots, x_n(t_0) = 0$) determinan una solución única del sistema considerado. Ésta es, evidentemente, la solución trivial del sistema (3.20) $X(t) \equiv 0$ (o, más detalladamente, $x_1(t) \equiv 0, x_2(t) \equiv 0, \ldots, x_n(t) \equiv 0$). El determinante $W(t_0) = 0$. Por consiguiente, existe un sistema no trivial $c_1, c_2, \ldots, c_n$ que satisface la ecuación

$$c_1 X_1(t_0) + c_2 X_2(t_0) + \ldots + c_n X_n(t_0) = 0,$$

puesto que ésta es una ecuación vectorial equivalente al sistema de n ecuaciones lineales homogéneas con respecto a c_i, cuyo determinante es igual a cero:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_{1i}(t_0) = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_{2i}(t_0) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_{ni}(t_0) = 0.$$

La solución $X(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i(t)$ de la ecuación (3.20), correspondiente a dicho sistema no trivial $c_1, c_2, \ldots, c_n$, satisface las condiciones iniciales nulas $X(t_0) = 0$ y, por lo tanto, coincide con la solución trivial del sistema (3.20):

$$\sum_{i=1}^{n} c_i X_i(t) \equiv 0,$$

es decir, X_i son linealmente dependientes.

Observación. Este teorema, como lo demuestran ejemplos simples, no se extiende a vectores arbitrarios $X_1, X_2, \ldots, X_n$, que no son soluciones de un sistema (3.20) con coeficientes continuos.

Ejemplo 1. El sistema de vectores

$$X_1 = \begin{Vmatrix} t \\ t \end{Vmatrix} \quad \text{y} \quad X_2 = \begin{Vmatrix} t^2 \\ t^2 \end{Vmatrix}$$

es linealmente independiente, puesto que de

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 = 0,$$

o bien

$$\begin{cases} \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 = 0, \\ \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 = 0 \end{cases}$$

se deduce que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ (véase la pág. 99, ejemplo 1). En cambio, el wronskiano $\begin{vmatrix} t & t^2 \\ t & t^2 \end{vmatrix}$ es idénticamente nulo. Por consiguiente, los vectores X_1 y X_2 no pueden ser soluciones de un mismo sistema lineal homogéneo (3.20) con coeficientes continuos $a_{ij}(t)$ $(i, j = 1, 2)$.

Teorema 3.5. *La combinación lineal $\sum_{i=1}^{n} c_i X_i$ de n soluciones linealmente independientes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ del sistema lineal homogéneo (3.20) con coeficientes $a_{ij}(t)$ continuos en el segmento $a \leqslant t \leqslant b$, es solución general de este sistema en dicho segmento.*

Demostración. Como los coeficientes $a_{ij}(t)$ son continuos en el segmento $a \leqslant t \leqslant b$, el sistema satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad y, por lo tanto, para la demostración del teorema es suficiente probar que escogiendo las constantes c_i en la solución $\sum_{i=1}^{n} c_i X_i$ se pueden satisfacer las condiciones iniciales $X(t_0) = X_0$, elegidas arbitrariamente,

$$X_0 = \begin{Vmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n0} \end{Vmatrix},$$

donde t_0 es uno de los valores de t en el segmento $a \leqslant t \leqslant b$, es decir, que se puede satisfacer la ecuación vectorial

$$\sum_{i=1} c_i X_i(t_0) = X_0,$$

o el sistema equivalente de n ecuaciones escalares:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_{1i}(t_0) = x_{10},$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_{2i}(t_0) = x_{20},$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_{ni}(t_0) = x_{n0}.$$

Este sistema es resoluble con respecto a c_i para cualesquiera x_{i0}, puesto que el determinante del sistema es el wronskiano del sistema de soluciones linealmente independiente $X_1, X_2, \dots, X_n$ y, por consiguiente, no se anula en ningún punto del segmento $a \leqslant t \leqslant b$.

Ejemplo 2.

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -x. \end{aligned}\right\} \tag{3.22}$$

No es difícil comprobar que el sistema (3.22) se satisface por las soluciones

$$x_1 = \cos t, \quad y_1 = -\operatorname{sen} t \quad \text{y} \quad x_2 = \operatorname{sen} t, \quad y_2 = \cos t.$$

Estas soluciones son linealmente independientes, puesto que el wronskiano

$$\begin{vmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{vmatrix} = 1$$

es diferente de cero. Por consiguiente, la solución general tiene la forma

$$x = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t,$$
$$y = -c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t,$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

Teorema 3.6. *Si $\tilde{X}$ es solución del sistema lineal no homogéneo*

$$L[X] = F \tag{3.19}$$

y X_1 es solución del sistema homogéneo correspondiente $L[X] = 0$, entonces la suma $X_1 + \tilde{X}$ es también solución del sistema no homogéneo $L[X] = F$.

Demostración. Se da que $L[\tilde{X}] \equiv F$ y $L[X_1] \equiv 0$; hay que demostrar que $L[X_1 + \tilde{X}] \equiv F$.

Aplicando la propiedad 2) del operador L, se obtiene

$$L[X_1 + \tilde{X}] \equiv L[X_1] + L[\tilde{X}] \equiv F.$$

Teorema 3.7. *La solución general en el segmento $a \leqslant t \leqslant b$ del sistema no homogéneo (3.19) con coeficientes $a_{ij}(t)$ y segundos miembros $f_i(t)$ continuos en dicho segmento, es igual a la suma de la solución general $\sum_{i=1}^{n} c_i X_i$ del sistema homogéneo correspondiente y de una solución particular $\tilde{X}$ del sistema no homogéneo considerado.*

Demostración. Puesto que las condiciones del teorema de existencia y unicidad de la solución se cumplen (véase la pág. 187), entonces para la demostración del teorema es suficiente probar que eligiendo las constantes arbitrarias c_i en la solución $X = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i + \tilde{X}$ se pueden satisfacer las condiciones iniciales dadas arbitrariamente

$$X(t_0) = X_0 = \begin{Vmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n0} \end{Vmatrix},$$

es decir, hay que demostrar que la ecuación matricial

$$\sum_{i=1}^{n} c_i X_i(t_0) + \tilde{X}(t_0) = X_0$$

o el sistema de ecuaciones equivalente

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} c_i x_{1i}(t_0) + \tilde{x}_1(t_0) = x_{10}, \\ &\sum_{i=1}^{n} c_i x_{2i}(t_0) + \tilde{x}_2(t_0) = x_{20}, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &\sum_{i=1}^{n} c_i x_{ni}(t_0) + \tilde{x}_n(t_0) = x_{n0} \end{aligned}\right\} \qquad (3.23)$$

tiene siempre solución $c_1, c_2, \ldots, c_n$ para segundos miembros cualesquiera. Pero en esta forma dicha afirmación es evidente, ya que el determinante del sistema (3.23) es el wronskiano en el punto $t = t_0$ de las soluciones linealmente independientes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ del sistema homogéneo correspondiente y, según el teorema 3.4, es diferente de cero. En consecuencia, el sistema (3.23) tiene solución $c_1, c_2, \ldots, c_n$ para segundos miembros cualesquiera.

Teorema 3.8 (principio de superposición). *La solución del sistema de ecuaciones lineales*

$$L[X] = \sum_{i=1}^{m} F_i, \qquad F_i = \begin{Vmatrix} f_{1i}(t) \\ f_{2i}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{ni}(t) \end{Vmatrix}$$

es la suma $\sum_{i=1}^{m} X_i$ *de las soluciones* X_i *de las ecuaciones*

$$L[X_i]=F_i \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

D e m o s t r a c i ó n. Se da que $L[X_i]\equiv F_i$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$; hay que demostrar que

$$L\left[\sum_{i=1}^{m} X_i\right]\equiv \sum_{i=1}^{m} F_i.$$

Aplicando la propiedad 2) del operador L, obtenemos

$$L\left[\sum_{i=1}^{m} X_i\right]\equiv \sum_{i=1}^{m} L[X_i]\equiv \sum_{i=1}^{m} F_i$$

O b s e r v a c i ó n. El teorema 3.8, sin modificaciones en su demostración, se extiende evidentemente también al caso cuando $m\to\infty$, si la serie $\sum_{i=1}^{\infty} X_i$ converge y puede ser derivada término a término.

Teorema 3.9. *Si el sistema de ecuaciones lineales*

$$L[X]=U+iV,$$

donde

$$U=\begin{Vmatrix} u_1\\ u_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ u_n \end{Vmatrix},\quad V=\begin{Vmatrix} v_1\\ v_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ v_n \end{Vmatrix},$$

con funciones reales $a_{ij}(t)$, $u_i(t)$, $v_i(t)$ $(i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, *tiene la solución*

$$X=\tilde{U}+i\tilde{V},\quad \tilde{U}=\begin{Vmatrix} \tilde{u}_1\\ \tilde{u}_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \tilde{u}_n \end{Vmatrix},\quad \tilde{V}=\begin{Vmatrix} \tilde{v}_1\\ \tilde{v}_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \tilde{v}_n \end{Vmatrix},$$

entonces la parte real $\tilde{U}$ *de la solución y su parte imaginaria* $\tilde{V}$ *son, respectivamente, soluciones de las ecuaciones*

$$L[X]=U \quad \text{y} \quad L[X]=V.$$

D e m o s t r a c i ó n. Se da que $L[\tilde{U}+i\tilde{V}]\equiv U+iV$; hay que demostrar que $L[\tilde{U}]=U$, $L[\tilde{V}]=V$.

Aplicando las propiedades 1) y 2) del operador L, se obtiene

$$L[\tilde{U}+i\tilde{V}]\equiv L[\tilde{U}]+iL[\tilde{V}]\equiv U+iV.$$

Por lo tanto, $L[\tilde{U}]\equiv U$ y $L[\tilde{V}]\equiv V$.

Si es conocida la solución general del sistema homogéneo correspondiente $L[X]=0$, pero no se logra escoger la solución particular del sistema homogéneo $L[X]=F$ y, por lo tanto, no es posible utilizar el teorema 3.7, entonces se puede aplicar el método de variación de las constantes.

Supongamos que $X=\sum_{i=1}^{n} c_i X_i$, donde las c_i son constantes arbitrarias, es la solución general del sistema homogéneo correspondiente

$$\frac{dX}{dt}-AX=0$$

y que, por consiguiente, X_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ son soluciones particulares linealmente independientes de dicho sistema. La solución del sistema no homogéneo

$$\frac{dX}{dt}-AX=F$$

se busca en la forma

$$X=\sum_{i=1}^{n} c_i(t)\, X_i,$$

donde $c_i(t)$ son nuevas funciones desconocidas. Al sustituir en la ecuación no homogénea, se obtiene

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(t)\, X_i+\sum_{i=1}^{n} c_i(t)\frac{dX_i}{dt}=A\sum_{i=1}^{n} c_i(t)\, X_i+F,$$

o bien, como $\frac{dX_i}{dt}\equiv AX_i$,

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(t)\, X_i=F.$$

Esta ecuación vectorial es equivalente al sistema:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} c_i'(t)\, x_{1i}=f_1(t),\\ &\sum_{i=1}^{n} c_i'(t)\, x_{2i}=f_2(t),\\ &\cdots\cdots\cdots\\ &\sum_{i=1}^{n} c_i'(t)\, x_{ni}=f_n(t). \end{aligned}\right\} \tag{3.24}$$

De este sistema de n ecuaciones con n incógnitas $c_i'(t)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, cuyo determinante W coincide con el wronskiano de las soluciones linealmente independientes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ y, en consecuencia, es diferente de cero, se determinan todas las $c_i'(t)$:

$$c_i'(t)=\varphi_i(t) \quad (i=1, 2, \ldots, n),$$

de donde, integrando, se hallan las funciones desconocidas $c_i(t)$:

$$c_i(t)=\int \varphi_i(t)\,dt+\bar{c}_i \quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Ejemplo 3.

$$\frac{dx}{dt}=y, \quad \frac{dy}{dt}=-x+\frac{1}{\cos t}.$$

La solución general del sistema homogéneo correspondiente

$$\frac{dx}{dt}=y, \quad \frac{dy}{dt}=-x$$

tiene la forma $x=c_1\cos t+c_2\operatorname{sen} t$, $y=-c_1\operatorname{sen} t+c_2\cos t$ (véase la pág. 192, ejemplo 2). Hagamos variar las constantes.

$$x=c_1(t)\cos t+c_2(t)\operatorname{sen} t,$$
$$y=-c_1(t)\operatorname{sen} t+c_2(t)\cos t.$$

$c_1'(t)$ y $c_2'(t)$ se determinan del sistema (3.24), el cual tiene en este caso la forma

$$c_1'(t)\cos t+c_2'(t)\operatorname{sen} t=0,$$
$$-c_1'(t)\operatorname{sen} t+c_2'(t)\cos t=\frac{1}{\cos t},$$

de donde

$$c_1'(t)=-\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}, \quad c_2'(t)=1.$$

Por lo tanto,

$$c_1(t)=\ln|\cos t|+\bar{c}_1,$$
$$c_2(t)=t+\bar{c}_2$$

y, en definitiva, se obtiene

$$x=\bar{c}_1\cos t+\bar{c}_2\operatorname{sen} t+\cos t\ln|\cos t|+t\operatorname{sen} t,$$
$$y=-\bar{c}_1\operatorname{sen} t+\bar{c}_2\cos t-\operatorname{sen} t\ln|\cos t|+t\cos t.$$

§ 5. SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

Se llama *sistema lineal con coeficientes constantes* al sistema lineal de ecuaciones

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j+f_i(t) \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

o, en forma vectorial,

$$\frac{dX}{dt} = AX + F,$$

en el cual todos los coeficientes a_{ij} son constantes o, lo que es lo mismo, su matriz A es constante.

La manera más sencilla de integrar un sistema de ecuaciones lineales homogéneas o no homogéneas con coeficientes constantes es reducirlo a una ecuación de orden mayor. Además, como fue señalado en la pág. 182, la ecuación obtenida de orden mayor será lineal y con coeficientes constantes.

Sin embargo, se puede hallar también directamente el sistema fundamental de soluciones del sistema lineal homogéneo con coeficientes constantes.

Las soluciones del sistema

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n, \end{aligned}\right\} \qquad (3.25)$$

donde a_{ij} son constantes, se buscarán en la forma

$$x_1 = \alpha_1 e^{kt}, \quad x_2 = \alpha_2 e^{kt}, \quad \ldots, \quad x_n = \alpha_n e^{kt},$$

con α_j constantes ($j = 1, 2, \ldots, n$). Sustituyendo en el sistema (3.25), dividiendo entre e^{kt} y pasando todos los sumandos al primer miembro, obtenemos

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}-k)\,\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n &= 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22}-k)\,\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + (a_{nn}-k)\,\alpha_n &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3.26)$$

Para que este sistema de n ecuaciones lineales homogéneas con n incógnitas α_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) tenga solución no trivial, es necesario y suficiente que el determinante del sistema (3.26) sea igual a cero:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-k \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.27)$$

De esta ecuación de grado n se determinan los valores de k para los cuales el sistema (3.26) tiene soluciones no triviales α_j ($j = 1,$

2, ..., n). La ecuación (3.27) se llama *ecuación característica*. Si todas las raíces k_i ($i=1, 2, \ldots, n$) de la ecuación característica son diferentes, entonces, sustituyéndolas sucesivamente en el sistema (3.26), se determinan los valores no triviales $\alpha_j^{(i)}$ ($i, j = 1, 2, \ldots, n$) correspondientes; hallando, por consiguiente, n soluciones del sistema inicial (3.25) de la forma

$$x_1^{(i)} = \alpha_1^{(i)} e^{k_i t},\ x_2^{(i)} = \alpha_2^{(i)} e^{k_i t}, \ldots,\ x_n^{(i)} = \alpha_n^{(i)} e^{k_i t} \quad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{3.28}$$

donde el índice superior señala el número de la solución, y el inferior, el de la función desconocida.

Utilizando notaciones vectoriales, obtenemos el mismo resultado en forma aún más corta:

$$\frac{dX}{dt} = AX; \tag{3.25$_1$}$$

la solución se busca en la forma

$$X = \tilde{A} e^{kt}, \text{ donde } \tilde{A} = \begin{Vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n \end{Vmatrix},$$

$$\tilde{A} k e^{kt} = A \tilde{A} e^{kt},$$

o bien

$$(A - kE)\tilde{A} = 0 \tag{3.29}$$

donde E es la matriz unidad:

$$E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{Vmatrix}.$$

Para que la matriz no trivial $\tilde{A}$,

$$\tilde{A} \neq \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{Vmatrix},$$

satisfaga la ecuación (3.29), es necesario y suficiente que la matriz $A - kE$ sea singular, es decir, que su determinante sea igual a cero: $|A - kE| = 0$. Para cada raíz k_i de esta ecuación característica $|A - kE| = 0$, de (3.29) se determina la matriz diferente de cero $\tilde{A}^{(i)}$ y, si todas las raíces k_i de la ecuación característica son

diferentes, obtenemos n soluciones:

$$X_1 = \bar{A}^{(1)} e^{k_1 t},\ X_2 = \bar{A}^{(2)} e^{k_2 t},\ \ldots,\ X_n = \bar{A}^{(n)} e^{k_n t},$$

donde

$$\bar{A}^{(i)} = \begin{Vmatrix} \alpha_1^{(i)} \\ \alpha_2^{(i)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n^{(i)} \end{Vmatrix}.$$

Estas soluciones, como no es difícil demostrar, son linealmente independientes. En efecto, si existiera la dependencia lineal

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \bar{A}^{(i)} e^{k_i t} \equiv 0,$$

o, en forma desarrollada

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_1^{(i)} e^{k_i t} \equiv 0, \\ \sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_2^{(i)} e^{k_i t} \equiv 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_n^{(i)} e^{k_i t} \equiv 0, \end{array}\right\} \tag{3.30}$$

entonces, en virtud de la independencia lineal de las funciones $e^{k_i t}$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ (véase la pág. 99), de (3.30) se obtendría que

$$\left.\begin{array}{l} \beta_i \alpha_1^{(i)} = 0, \\ \beta_i \alpha_2^{(i)} = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \beta_i \alpha_n^{(i)} = 0. \end{array}\right\} \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{3.31}$$

Pero como para cada i al menos un $\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \ldots, \alpha_n^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, \ldots, n)$ es diferente de cero, entonces de (3.31) se deduce que $\beta_i = 0\ (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

De esta manera, las soluciones $\bar{A}^{(i)} e^{k_i t}$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ son linealmente independientes y la solución general del sistema (3.25) tiene la forma

$$X = \sum_{i=1}^{n} c_i \bar{A}^{(i)} e^{k_i t},$$

o bien

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_j^{(i)} e^{k_i t} \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

donde las c_i son constantes arbitrarias.

Las constantes $\alpha_i^{(j)}$ ($j=1, 2, \ldots, n$) no se determinan unívocamente del sistema (3.26) para $k=k_j$, puesto que el determinante del sistema es nulo y, por consiguiente, al menos una de las ecuaciones es consecuencia de las demás. La falta de unicidad en la determinación de $\alpha_i^{(j)}$ se debe a que la solución del sistema de ecuaciones lineales homogéneas sigue siendo solución del mismo al ser multiplicada por una constante arbitraria.

A la raíz compleja $k_j=p+qi$ de la ecuación característica (3.27) le corresponde la solución

$$X_j=\tilde{A}^{(j)}e^{k_jt}, \tag{3.32}$$

la cual, si todos los coeficientes a_{ij} son reales, puede ser sustituida por dos soluciones reales: por la parte real y por la imaginaria de la solución (3.32) (véase la pág. 188). La raíz compleja conjugada $k_{j+1}=p-qi$ de la ecuación característica no da nuevas soluciones reales linealmente independientes.

Si la ecuación característica tiene una raíz k_s de multiplicidad γ, entonces, tomando en cuenta que el sistema de ecuaciones (3.25) se puede reducir por medio del proceso señalado en la pág. 177 a una ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes de n-ésimo o menor orden (véase la observación en la pág. 182), se puede afirmar que la solución del sistema (3.25) tiene la forma

$$X(t)=(\tilde{A}_0^{(s)}+\tilde{A}_1^{(s)}t+\ldots+\tilde{A}_{\gamma-1}^{(s)}t^{\gamma-1})e^{k_st}, \tag{3.33}$$

donde

$$\tilde{A}_i^{(s)}=\left\|\begin{matrix}\alpha_{1i}^{(s)}\\ \alpha_{2i}^{(s)}\\ \vdots\\ \alpha_{ni}^{(s)}\end{matrix}\right\|;$$

las $\alpha_{ji}^{(s)}$ son constantes.

Hay que hacer notar que aún cuando el sistema de n ecuaciones (3.25) se reduzca a una ecuación de orden menor que n (vease la observación 1 en la pág. 181), la ecuación característica de esta última tendrá necesariamente raíces que coinciden con las raíces de la ecuación (3.27) (puesto que la ecuación a la cual se redujo el sistema debe tener soluciones del tipo e^{k_st}, donde k_s son raíces de la ecuación (3.27)). Pero es posible que las multiplicidades de estas raíces (si el orden de la ecuación obtenida es menor que n) sean menores que las multiplicidades de las raíces de la ecuación (3.27); por lo tanto, puede ser que en la solución (3.33) el grado del primer factor sea menor que $\gamma-1$, es decir, al buscar la solución en la forma (3.33) ciertos coeficientes $\tilde{A}_i^{(s)}$ pueden anularse, incluso los de los términos de mayor grado.

De esta manera, la solución del sistema (3.25) que corresponde a una raíz múltiple de la ecuación característica, debe ser buscada en la forma (3.33). Sustituyendo (3.33) en la ecuación (3.25_1) y exigiendo que ésta se reduzca a una identidad, se determinan las matrices $\tilde{A}_i^{(s)}$; además, algunas de éstas, entre ellas $\tilde{A}_{\gamma-1}^{(s)}$, pueden resultar iguales a cero.

Observación. Se puede indicar más exactamente la forma de la solución del sistema (3.25), correspondiente a una raíz múltiple de la ecuación característica (3.27). Transformando el sistema (3.25) mediante una transformación lineal no degenerada en un sistema en el cual la matriz $A-kE$ tenga forma normal de Jordan e integrando el sistema de ecuaciones obtenido, fácilmente integrable, se halla que la solución correspondiente a la raíz múltiple k_s de la ecuación característica (3.27) de multiplicidad γ, tiene la forma

$$X(t)=(\tilde{A}_0^{(s)}+\tilde{A}_1^{(s)}t+\ldots+\tilde{A}_{\beta-1}^{(s)}t^{\beta-1})e^{k_st},$$

donde β es el mayor grado del divisor elemental de la matriz $A-kE$, correspondiente a la raíz k_s.

Ejemplo 1.

$$\frac{dx}{dt}=x+2y,\quad \frac{dy}{dt}=4x+3y.$$

La ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 1-k & 2 \\ 4 & 3-k \end{vmatrix}=0,\ \text{o bien}\ k^2-4k-5=0$$

tiene las raíces $k_1=5$, $k_2=-1$. Por consiguiente, buscamos la solución en la forma

$$\begin{aligned} x_1&=\alpha_1^{(1)}e^{5t}, & y_1&=\alpha_2^{(1)}e^{5t},\\ x_2&=\alpha_1^{(2)}e^{-t}, & y_2&=\alpha_2^{(2)}e^{-t}. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Sustituyendo (3.34) en el sistema original, obtenemos $-4\alpha_1^{(1)}+2\alpha_2^{(1)}=0$, de donde $\alpha_2^{(1)}=2\alpha_1^{(1)}$; $\alpha_1^{(1)}$ permanece arbitrario. Por lo tanto,

$$x_1=c_1e^{5t},\quad y_1=2c_1e^{5t},\quad c_1=\alpha_1^{(1)}.$$

Para determinar los coeficientes $\alpha_1^{(2)}$ y $\alpha_2^{(2)}$ se obtiene la ecuación $2\alpha_1^{(2)}+2\alpha_2^{(2)}=0$, de donde $\alpha_2^{(2)}=-\alpha_1^{(2)}$; el coeficiente $\alpha_1^{(2)}$ permanece arbitrario. Por consiguiente,

$$x_2=c_2e^{-t},\ y_2=-c_2e^{-t},\ c_2=\alpha_1^{(2)}.$$

La solución general es

$$x=c_1e^{5t}+c_2e^{-t},$$
$$y=2c_1e^{5t}-c_2e^{-t}.$$

Ejemplo 2.

$$\frac{dx}{dt}=x-5y,$$
$$\frac{dy}{dt}=2x-y.$$

La ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 1-k & -5 \\ 2 & -1-k \end{vmatrix}=0,\ \text{o bien}\ k^2+9=0$$

tiene las raíces $k_{1,2}=\pm 3i$, $x_1=\alpha_1 e^{3it}$, $y_1=\alpha_2 e^{3it}$, $(1-3i)\alpha_1-5\alpha_2=0$. A esta ecuación la satisfacen, por ejemplo, $\alpha_1=5$, $\alpha_2=1-3i$. En consecuencia,

$$x_1=5e^{3it}=5(\cos 3t+i\,\mathrm{sen}\,3t),$$
$$y_1=(1-3i)\,e^{3it}=(1-3i)(\cos 3t+i\,\mathrm{sen}\,3t).$$

Las partes real e imaginaria de esta solución son también soluciones del sistema considerado, y su combinación lineal con coeficientes constantes arbitrarios es solución general.

$$x=5c_1\cos 3t+5c_2\,\mathrm{sen}\,3t,$$

$$y=c_1(\cos 3t+3\,\mathrm{sen}\,3t)+c_2(\mathrm{sen}\,3t-3\cos 3t).$$

Ejemplo 3.

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=x-y,\\ \frac{dy}{dt}&=x+3y.\end{aligned}\right\}\tag{3.35}$$

La ecuación característica

$$\begin{vmatrix}1-k & -1\\ 1 & 3-k\end{vmatrix}=0, \text{ o bien } k^2-4k+4=0$$

tiene la raíz múltiple $k_{1,2}=2$. Por lo tanto, la solución debe buscarse en la forma

$$\left.\begin{aligned}x&=(\alpha_1+\beta_1 t)\,e^{2t},\\ y&=(\alpha_2+\beta_2 t)\,e^{2t}.\end{aligned}\right\}\tag{3.36}$$

Sustituyendo (3.36) en (3.35), se obtiene

$$2\alpha_1+\beta_1+2\beta_1 t=\alpha_1+\beta_1 t-\alpha_2-\beta_2 t,$$

de donde

$$\beta_2=-\beta_1,$$
$$\alpha_2=-\alpha_1-\beta_1.$$

α_1 y β_1 permanecen arbitrarios. Designando estas constantes arbitrarias respectivamente por c_1 y c_2, obtenemos la solución general en la forma

$$x=(c_1+c_2 t)\,e^{2t},$$
$$y=-(c_1+c_2+c_2 t)\,e^{2t}.$$

§ 6. MÉTODOS APROXIMADOS DE INTEGRACIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y DE ECUACIONES DE n-ÉSIMO ORDEN

Todos los métodos de integración aproximada de ecuaciones diferenciales de primer orden, expuestos en el § 7 del cap. 1, sin cambios sustanciales, pueden aplicarse a los sistemas de ecuaciones de primer orden, y también a las ecuaciones de orden mayor que 1, las cuales se reducen a un sistema de ecuaciones de primer orden por el método habitual (véase la pág. 88).

1. Método de las aproximaciones sucesivas. Como fue señalado en la pág. 54, el método de las aproximaciones

sucesivas es aplicable a los sistemas de ecuaciones

$$\frac{dy_i}{dx}=f_i(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{3.37}$$

con condiciones iniciales $y_i(x_0)=y_{i0}\,(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, si las funciones f_i son continuas en todos sus argumentos y satisfacen la condición de Lipschitz respecto a todos los argumentos, a partir del segundo

La aproximación nula $y_{i0}(x)\,(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ puede ser escogida arbitrariamente, exigiendo sólo que se satisfagan las condiciones iniciales; las aproximaciones subsiguientes se calculan por la fórmula

$$y_{i,k+1}(x)=y_{i0}+\int_{x_0}^{x} f_i(x,\ y_{1k},\ y_{2k},\ \ldots,\ y_{nk})\,dx\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Al igual que para una ecuación de primer orden, este método se aplica raramente en la práctica del cálculo aproximado, debido a la convergencia relativamente lenta de las aproximaciones y a lo complejo y variado de las operaciones.

2. Método de Euler. La curva integral del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dy_i}{dx}=f_i(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

determinada por las condiciones iniciales $y_i(x_0)=y_{i0}\,(i=1,\ 2,\ \ldots,\ \ldots,\ n)$, se sustituye por la quebrada que es tangente en uno de los puntos frontera de cada segmento a la curva integral que pasa por dicho punto (en la fig. 3.2 se representa la quebrada de Euler y su proyección sólo en el plano xy_1). El segmento $x_0\leqslant x\leqslant b$, en el cual hay que calcular la solución, se divide en partes de longitud h, y el cálculo se efectúa por las fórmulas

$$y_i(x_{k+1})=y_i(x_k)+hy_i'(x_k)\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

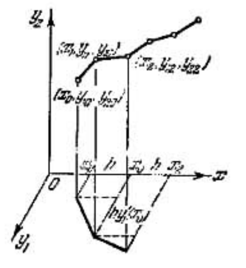


Fig. 3.2

La convergencia de las quebradas de Euler hacia la curva integral, cuando $h\to 0$, se demuestra de la misma manera que para una ecuación de primer orden (véase la pág. 45). Para elevar la exactitud se pueden aplicar iteraciones (emparejamientos).

3. Desarrollo en fórmula de Taylor. Considerando que los segundos miembros del sistema (3.37) son derivables k

veces (para asegurar la derivabilidad de las soluciones $k+1$ veces), sustituimos las soluciones buscadas por algunos primeros términos de sus desarrollos de Taylor

$$y_i(x) \approx y_i(x_0) + y_i'(x_0)(x-x_0) + y_i''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \dots$$
$$\dots + y_i^{(k)}(x_0)\frac{(x-x_0)^k}{k!}$$
$$(i=1,\ 2,\ \dots,\ n).$$

La apreciación del error puede realizarse acotando el resto de la fórmula de Taylor

$$R_{ik} = y_i^{(k+1)}[x_0 + \theta(x-x_0)]\frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!}, \text{ donde } 0<\theta<1.$$

Este método da buenos resultados solo en un pequeño entorno del punto x_0.

4. Método de Störmer. El segmento $x_0 \leqslant x \leqslant b$ se divide en partes de longitud h, y el cálculo de la solución del sistema (3.37) se realiza mediante una de las fórmulas:

$$y_{i,\ k+1} = y_{ik} + q_{ik} + \frac{1}{2}\Delta q_{i,\ k-1}, \tag{3.38}$$

$$y_{i,\ k+1} = y_{ik} + q_{ik} + \frac{1}{2}\Delta q_{i,\ k-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{i,\ k-2}, \tag{3.39}$$

$$y_{i,\ k+1} = y_{ik} + q_{ik} + \frac{1}{2}\Delta q_{i,\ k-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{i,\ k-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 q_{i,\ k-3}, \tag{3.40}$$

. . . .

donde

$$y_{ik} = y_i(x_k) \qquad (i=1,\ 2,\ \dots,\ n),$$
$$x_k = x_0 + kh, \quad q_{ik} = y_i'(x_k)h,$$
$$\Delta q_{i,\ k-1} = q_{ik} - q_{i,\ k-1}, \ \Delta^2 q_{i,\ k-2} = \Delta q_{i,\ k-1} - \Delta q_{i,\ k-2},$$
$$\Delta^3 q_{i,\ k-3} = \Delta^2 q_{i,\ k-2} - \Delta^2 q_{i,\ k-3}.$$

Las fórmulas (3.38), (3.39) y (3.40) pueden obtenerse del mismo modo que para una ecuación de primer orden (véase la pág. 65). El orden del error al aplicar estas fórmulas es el mismo que para una ecuación.

Para comenzar el cálculo por una de las fórmulas de Störmer es necesario conocer algunos primeros valores $y_i(x_k)$, que pueden ser hallados mediante el desarrollo por la fórmula de Taylor, o por el método de Euler con paso disminuido; además, al igual que para una ecuación, para elevar la exactitud se pueden aplicar iteraciones (véanse las págs. 64—65), o el método de Runge.

5. Método de Runge. Se calculan los números

$$m_{i1}=f_i(x_k,\ y_{1k},\ y_{2k},\ \ldots,\ y_{nk}),$$
$$m_{i2}=f_i\left(x_k+\frac{h}{2},\ y_{1k}+\frac{hm_{11}}{2},\ y_{2k}+\frac{hm_{21}}{2},\ \ldots,\ y_{nk}+\frac{hm_{n1}}{2}\right),$$
$$m_{i3}=f_i\left(x_k+\frac{h}{2},\ y_{1k}+\frac{hm_{12}}{2},\ y_{2k}+\frac{hm_{22}}{2},\ \ldots,\ y_{nk}+\frac{hm_{n2}}{2}\right),$$
$$m_{i4}=f_i(x_k+h,\ y_{1k}+hm_{13},\ y_{2k}+hm_{23},\ \ldots,\ y_{nk}+hm_{n3}),$$

conociendo los cuales hallamos $y_{i,\ k+1}$ por la fórmula

$$y_{i,\ k+1}=y_{ik}+\frac{h}{6}(m_{i1}+2m_{i2}+2m_{i3}+m_{i4})\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

El orden del error es el mismo que para una ecuación.

Una aproximación grosera del paso h, según la exactitud elegida del resultado, se puede escoger considerando el orden de los errores en las fórmulas aplicadas; luego, éste se precisa por medio de cálculos de prueba con pasos h y $\frac{h}{2}$. Lo más seguro es calcular con pasos h y $\frac{h}{2}$ todos los valores necesarios $y_i(x_k)$, y si al comparar los resultados todos ellos coinciden en los límites de exactitud dada, entonces se considera que el paso h asegura la exactitud dada de cálculo; en caso contrario se disminuye nuevamente el paso y se realizan las operaciones con pasos $\frac{h}{2}$ y $\frac{h}{4}$, y así sucesivamente. Cuando se escoge correctamente el paso h, las diferencias Δq_{ik}, $\Delta^2 q_{ik}$, ... deben variar uniformemente, y las últimas diferencias en las fórmulas de Störmer deben influir sólo en las cifras de reserva.

EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 3

1. $\frac{dx}{dt}=y,\ \frac{dy}{dt}=-x,\ x(0)=0,\ y(0)=1$

2. $\frac{d^2x_1}{dt^2}=x_2,\ \frac{d^2x_2}{dt^2}=-x_1,\ x_1(0)=2,\ \dot{x}_1(0)=2,\ x_2(0)=2,\ x_2(0)=2.$

3. $\frac{dx}{dt}+5x+y=e^t,\quad \frac{dy}{dt}-x-3y=e^{2t}.$

4. $\frac{dx}{dt}=y,\ \frac{dy}{dt}=z,\ \frac{dz}{dt}=x.$

5. $\frac{dx}{dt}=y,\ \frac{dy}{dt}=\frac{y^2}{x}.$

6. $\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}=-x+y+3,\ \frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}=x+y-3.$

7. $\frac{dy}{dx}=\frac{z}{x},\ \frac{dz}{dx}=-xy.$

8. $\dfrac{dx}{z-y}=\dfrac{dy}{x-z}=\dfrac{dz}{y-x}$.

9. $\dfrac{dx}{dt}=-x+y+z$, $\dfrac{dy}{dt}=x-y+z$, $\dfrac{dz}{dt}=x+y-z$.

10. $t\dfrac{dx}{dt}+y=0$, $t\dfrac{dy}{dt}+x=0$.

11. $\dfrac{dx}{dt}=y+1$, $\dfrac{dy}{dt}=-x+\dfrac{x}{\operatorname{sen} t}$.

12. $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{y}{x-y}$, $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{x}{x-y}$.

13. $\dot{x}+y=\cos t$, $\dot{y}+x=\operatorname{sen} t$.

14. $\dot{x}+3x-y=0$, $\dot{y}-8x+y=0$, $x(0)=1$, $y(0)=4$.

15. $\dfrac{d^2\theta}{dt^2}+\operatorname{sen}\theta=0$ para $t=0$, $\theta=\dfrac{\pi}{36}$, $\dfrac{d\theta}{dt}=0$.

Determinar $\theta(1)$ con exactitud de 0,001.

16. $\dot{x}(t)=ax-y$, $\dot{y}(t)=x+ay$; a es una constante.

17. $\dot{x}+3x+4y=0$, $\dot{y}+2x+5y=0$

18. $\dot{x}=-5x-2y$, $\dot{y}=x-7y$.

19. $\dot{x}=y-z$, $\dot{y}=x+y$, $\dot{z}=x+z$.

20. $\dot{x}-y+z=0$, $\dot{y}-x-y=t$, $\dot{z}-x-z=t$.

21. $\dfrac{dx}{x(y-z)}=\dfrac{dy}{y(z-x)}=\dfrac{dz}{z(x-y)}$.

22. $\dfrac{dx}{x(y^2-z^2)}=\dfrac{dy}{y(z^2-x^2)}=\dfrac{dz}{z(x^2-y^2)}$.

23. $\dot{X}=AX$, donde $X=\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Vmatrix}$, y $A=\begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{Vmatrix}$.

CAPITULO 4

Teoría de la estabilidad

§ 1. CONCEPTOS GENERALES

Para hacer posible la descripción matemática de un fenómeno real cualquiera, inevitablemente hay que simplificarlo, idealizarlo, haciendo resaltar y tomando en cuenta sólo los factores más sustanciales que actúan sobre éste y despreciando los menos considerables. Entonces surge inevitablemente el problema sobre si fueron correctamente escogidas o no las suposiciones de simplificación. Es posible que los factores no considerados influyan fuertemente sobre el fenómeno estudiado, y cambien sus características cuantitativas, y aún cualitativas. En última instancia esta cuestión se resuelve en la práctica, viendo si corresponden o no las conclusiones obtenidas con los datos del experimento, pero de todas formas en muchos problemas se pueden señalar las condiciones bajo las cuales ciertas simplificaciones no son posibles.

Si cierto fenómeno se describe por medio del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dy_i}{dt} = \Phi_i(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.1}$$

con condiciones iniciales $y_i(t_0) = y_{i0}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, las cuales por lo general son el resultado de ciertas mediciones y, por lo tanto, han sido obtenidas inevitablemente con cierto error, entonces surge el problema sobre la influencia de pequeñas variaciones de las condiciones iniciales sobre la solución buscada.

Si variaciones arbitrariamente pequeñas de los valores iniciales pueden cambiar mucho la solución, entonces la solución determinada por las condiciones iniciales inexactas que hemos elegido no tiene comúnmente ningún valor práctico y no puede describir ni siquiera aproximadamente el fenómeno estudiado.

Por consiguiente, surge el problema, de gran importancia práctica, de hallar las condiciones bajo las cuales una variación suficientemente pequeña de los valores iniciales ocasiona una variación arbitrariamente pequeña de la solución.

Si t varía en el intervalo finito $t_0 \leqslant t \leqslant T$, entonces la solución a este problema la da el teorema sobre la dependencia continua de la solución con respecto a las condiciones iniciales (véase la pág. 56). Si, en cambio, t puede tomar valores arbitrariamente grandes, de este caso se ocupa la teoría de la estabilidad.

La solución $\varphi_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ del sistema (4.1) se llama estable, o más exactamente, *estable según Liapunov*, si para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede escoger un $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que para cualquier solución $y_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ de dicho sistema, cuyos valores iniciales satisfacen las desigualdades

$$|y_i(t_0)-\varphi_i(t_0)| < \delta(\varepsilon) \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

se cumplen, para todas las $t \geqslant t_0$, las desigualdades

$$|y_i(t)-\varphi_i(t)| < \varepsilon \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{4.2}$$

es decir, las soluciones cercanas respecto a sus valores iniciales permanecen cercanas para todas las $t \geqslant t_0$.

Observación. Si el sistema (4.1) satisface las condiciones del teorema sobre la dependencia continua de la solución respecto a las condiciones iniciales, entonces en la definición de estabilidad, en lugar de $t \geqslant t_0$, se puede escribir $t \geqslant T \geqslant t_0$, debido a que en virtud de este teorema, las soluciones permanecen cercanas en el segmento $t_0 \leqslant t \leqslant T$ para valores iniciales suficientemente próximos.

Si para un $\delta > 0$ arbitrariamente pequeño, por lo menos para una solución $y_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ las desigualdades (4.2) no se cumplen, entonces la solución $\varphi_i(t)$ se llama *inestable*. Las soluciones inestables rara vez son de interés práctico.

Si la solución $\varphi_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ no sólo es estable, sino que además satisface la condición

$$\lim_{t\to\infty} |y_i(t)-\varphi_i(t)| = 0, \tag{4.3}$$

si $|y_i(t_0)-\varphi_i(t_0)| < \delta_1$, $\delta_1 > 0$, entonces la solución $\varphi_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ se llama *asintóticamente estable*.

Obsérvese que la condición (4.3) aún no implica la estabilidad de la solución $\varphi_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$.

Ejemplo 1. Analizar si es estable o no la solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dt}=-a^2y$, $a \neq 0$, determinada por la condición inicial $y(t_0)=y_0$. La solución

$$y=y_0e^{-a^2(t-t_0)}$$

es asintóticamente estable, ya que

$$\left|y_0e^{-a^2(t-t_0)}-\bar{y}_0e^{-a^2(t-t_0)}\right| = e^{-a^2(t-t_0)}\,|y_0-\bar{y}_0| < \varepsilon$$

cuando $t \geq t_0$, si $|y_0 - \bar{y}_0| < \varepsilon e^{-a^2 t_0}$ y

$$\lim_{t \to \infty} e^{-a^2(t-t_0)} |y_0 - \bar{y}_0| = 0.$$

Ejemplo 2. Investigar la estabilidad de la solución de la ecuación $\frac{dy}{dt} = a^2 y$, $a \neq 0$, determinada por la condición $y(t_0) = y_0$.

La solución $y = y_0 e^{a^2(t-t_0)}$ es inestable, ya que es imposible escoger un $\delta > 0$ tal que de la desigualdad $|\bar{y}_0 - y_0| < \delta(\varepsilon)$ se deduzca

$$|\bar{y}_0 e^{a^2(t-t_0)} - y_0 e^{a^2(t-t_0)}| < \varepsilon,$$

o bien

$$e^{a^2(t-t_0)} |\bar{y}_0 - y_0| < \varepsilon$$

para todas las $t \geq t_0$

El análisis de la estabilidad de cierta solución

$$y_i = \bar{y}_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

del sistema de ecuaciones

$$\frac{dy_i}{dt} = \Phi_i(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.1}$$

se puede reducir al estudio de la estabilidad de la solucion trivial, es decir, del *punto de reposo*, situado en el origen de coordenadas.

En efecto, transformemos el sistema de ecuaciones (4.1) a nuevas variables, haciendo

$$x_i = y_i - \bar{y}_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.4}$$

Las nuevas funciones desconocidas x_i serán las desviaciones $y_i - \bar{y}_i(t)$ de las funciones desconocidas anteriores de las funciones $\bar{y}_i(t)$, las cuales determinan la solución cuya estabilidad se investiga.

En virtud de (4.4), el sistema (4.1) en las nuevas variables toma la forma

$$\frac{dx_i}{dt} = -\frac{d\bar{y}_i}{dt} + \Phi_i(t, x_1 + \bar{y}_1(t), x_2 + \bar{y}_2(t), \ldots, x_n + \bar{y}_n(t))$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.5}$$

Evidentemente a la solución cuya estabilidad se estudia $y_i = \bar{y}_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ del sistema (4.1) le corresponde, debido a la dependencia $x_i = y_i - \bar{y}_i(t)$, la solución trivial $x_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n)$ del sistema (4.5), y el estudio de la estabilidad de la solución $y_i = \bar{y}_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ del sistema (4.1) puede sustituirse por la investigación de la estabilidad de la solución

trivial del sistema (4.5). Por esto en adelante sin limitaciones de la generalidad podemos considerar que se investiga la estabilidad de la solución trivial o, lo que es lo mismo, del punto de reposo del sistema de ecuaciones, situado en el origen de coordenadas.

Formulemos las condiciones de estabilidad aplicadas al punto de reposo $x_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$).

El punto de reposo $x_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) del sistema (4.5) es estable según Liapunov, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que de la desigualdad

$$|x_i(t_0)| < \delta(\varepsilon) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

se deduce que

$$|x_i(t)| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \text{ para } t \geqslant T \geqslant t_0.$$

En otras palabras: el punto de reposo $x_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) es estable según Liapunov, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta_1(\varepsilon) > 0$ tal que de la desigualdad

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t_0) < \delta_1^2(\varepsilon)$$

se deduce que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t) < \varepsilon^2$$

para $t \geqslant T$, es decir, la trayectoria cuyo punto inicial se encuentra en el δ_1—entorno*) del origen de coordenadas para $t \geqslant T$ no sale fuera de los límites del ε—entorno de dicho punto.

§ 2. TIPOS SIMPLES DE PUNTOS DE REPOSO

Analicemos la disposición de las trayectorias en un entorno del punto de reposo $x = 0$, $y = 0$ del sistema de dos ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y, \end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

donde

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

*) Aquí y en lo sucesivo por α—entorno se designará un entorno simétrico de radio α (es decir, de amplitud 2α) del punto considerado (*N. de la Red.*).

La solución se busca en la forma $x=\alpha_1 e^{kt}$, $y=\alpha_2 e^{kt}$ (véase la pág. 197). Para la determinación de k se obtiene la ecuación característica.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-k \end{vmatrix}=0,$$

o bien

$$k^2-(a_{11}+a_{22})k+(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})=0;$$

α_1 y α_2 se determinan, salvo un factor constante, de una de las ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}-k)\alpha_1+a_{12}\alpha_2=0, \\ a_{21}\alpha_1+(a_{22}-k)\alpha_2=0. \end{aligned}\right\} \quad (4.7)$$

Consideremos los siguientes casos:

a) *Las raíces de la ecuación característica k_1 y k_2 son reales y distintas.*

La solución general tiene la forma

$$\left.\begin{aligned} x=c_1\alpha_1 e^{k_1 t}+c_2\beta_1 e^{k_2 t}, \\ y=c_1\alpha_2 e^{k_1 t}+c_2\beta_2 e^{k_2 t}, \end{aligned}\right\} \quad (4.8)$$

donde α_i y β_i son constantes que se determinan de la ecuación (4.7) para $k=k_1$ y $k=k_2$ respectivamente, y c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

Aquí son posibles los siguientes casos:

1) Si $k_1<0$ y $k_2<0$, el punto de reposo es asintóticamente estable, puesto que debido a los factores $e^{k_1 t}$ y $e^{k_2 t}$, que figuran en (4.8), todos los puntos que se encuentran en el momento inicial $t=t_0$ en cualquier δ—entorno del origen de coordenadas, pasan a puntos situados en un ε—entorno arbitrariamente pequeño del origen de coordenadas para un valor de t suficientemente grande, y para $t\to\infty$ tienden a dicho punto. En la fig. 4.1 está representada la disposición de las trayectorias cerca del punto de reposo del tipo considerado, llamado *nudo estable*. Además, se indica con flechas el sentido del movimiento por las trayectorias al aumentar t.

2) Sea $k_1>0$, $k_2>0$. Este caso se transforma en el anterior al sustituir t por $-t$. Por lo tanto, las trayectorias tienen la misma forma que en el caso precedente, sólo que los puntos en ellas se mueven en sentido contrario (fig. 4.2). Es evidente que al aumentar t, los puntos arbitrariamente próximos al origen de coordenadas se alejan de un ε—entorno de éste. El punto de reposo es inestable según Liapunov. El punto de reposo del tipo considerado se llama *nudo inestable*.

3) Si $k_1 > 0$, $k_2 < 0$, entonces el punto de reposo es también inestable, puesto que el punto que se mueve por la trayectoria

$$x = c_1\alpha_1 e^{k_1 t}, \quad y = c_1\alpha_2 e^{k_1 t} \tag{4.9}$$

para valores arbitrariamente pequeños de c_1 al crecer t sale de un ε—entorno del origen de coordenadas.

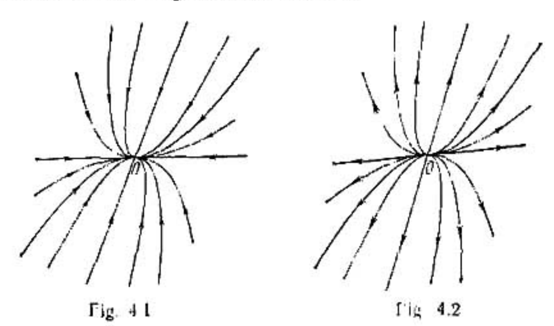


Fig. 4.1 Fig. 4.2

Obsérvese que en el caso considerado existen movimientos que se aproximan al origen de coordenadas, a saber:

$$x = c_2\beta_1 e^{k_2 t}, \quad y = c_2\beta_2 e^{k_2 t}.$$

Para diferentes valores de c_2 obtenemos diferentes movimientos por una misma recta $y = \frac{\beta_2}{\beta_1}x$. Al crecer t los puntos de ésta se

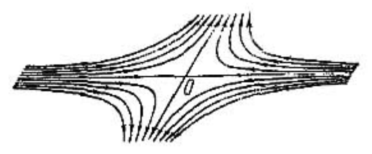


Fig. 4.3

mueven hacia el origen de coordenadas (fig. 4.3). Obsérvese también que los puntos de la trayectoria (4.9) se mueven al crecer t por la recta $y = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}x$, alejándose del origen de coordenadas. Si $c_1 \neq 0$ y $c_2 \neq 0$, entonces, tanto para $t \to \infty$ como para $t \to -\infty$, la trayectoria sale de un entorno del punto de reposo.

El punto de reposo del tipo mencionado se llama *montura* (fig. 4.3), porque la disposición de las trayectorias en un entorno

de éste se asemeja a la disposición de las líneas de nivel en un entorno de un punto tipo silla de montar de cierta superficie

$$z=f(x,\ y).$$

b) *Las raíces de la ecuación característica son complejas:*

$$k_{1,2}=p\pm qi,\quad q\neq 0.$$

La solución general del sistema considerado se puede representar en la forma (véase la pág. 200)

$$\left.\begin{aligned} x&=e^{pt}(c_1\cos qt+c_2\operatorname{sen} qt),\\ y&=e^{pt}(c_1^*\cos qt+c_2^*\operatorname{sen} qt),\end{aligned}\right\}\qquad(4.10)$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias, y c_1^* y c_2^*, cierta combinación lineal de estas constantes.

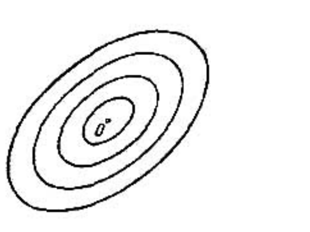


Fig. 4.4

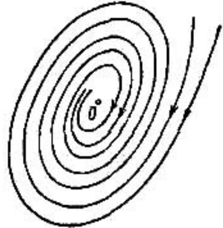


Fig. 4.5

Aquí son posibles los casos siguientes:

1) $k_{1,2}=p\pm qi,\quad p<0,\ q\neq 0.$

El factor e^{pt}, $p<0$, tiende a cero al crecer t, y el segundo factor de las ecuaciones (4.10), que es periódico, está acotado.

Si fuese $p=0$ entonces, debido a la periodicidad de los segundos factores en el segundo miembro de las ecuaciones (4.10), las trayectorias serían curvas cerradas que rodearían al punto de reposo $x=0$, $y=0$ (fig. 4.4). El factor e^{pt}, que tiende a cero al crecer t, $p<0$, transforma las curvas cerradas en espirales que se aproximan asintóticamente al origen de coordenadas cuando $t\to\infty$ (fig. 4.5). Además, para un valor de t suficientemente grande, los puntos que se hallaban cuando $t=t_0$ en cualquier δ—entorno del origen de coordenadas, caen en un ε—entorno dado del punto de reposo $x=0$, $y=0$, y con el subsiguiente aumento de t tienden a dicho punto. Por consiguiente, el punto de reposo es asintóticamente

estable; éste se llama *foco estable*. El foco se diferencia del nudo en que la tangente a las trayectorias no tiende a un límite determinado al aproximarse el punto de contacto hacia el punto de reposo.

2) $k_{1,2}=p\pm qi$, $p>0$, $q\neq 0$.

Este caso se transforma en el anterior mediante la sustitución de t por $-t$. Por lo tanto, las trayectorias no se diferencian de las del caso precedente, pero el movimiento por éstas se efectúa en sentido contrario al crecer t (fig. 4.6). Debido al factor creciente e^{pt}, los puntos que se hallaban en el momento inicial arbitrariamente próximos al origen de coordenadas se alejan al crecer t de un ε—entorno del origen, y el punto de reposo es inestable. Este se llama *foco inestable*.

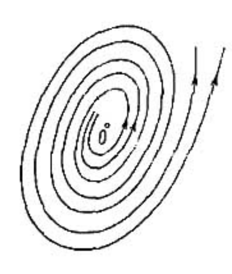


Fig. 4.6

3) $k_{1,2}=\pm qi$, $q\neq 0$.

Como ya fue señalado anteriormente, debido a la periodicidad de las soluciones, las trayectorias son curvas cerradas, que contienen en su interior al punto de reposo (fig. 4.4), llamado en este caso *centro*. El centro es un punto de reposo estable, puesto que para un $\varepsilon>0$ dado, se puede tomar un $\delta>0$ tal que las trayectorias cerradas, cuyos puntos iniciales pertenezcan a un δ—entorno del origen de coordenadas, no salgan de los límites de un ε—entorno de dicho punto o, lo que es lo mismo, se pueden escoger c_1 y c_2 tan pequeñas que las soluciones

$$\left.\begin{aligned} x&=c_1\cos qt+c_2\operatorname{sen} qt, \\ y&=c_1^*\cos qt+c_2^*\operatorname{sen} qt \end{aligned}\right\} \qquad (4.11)$$

satisfagan la desigualdad

$$x^2(t)+y^2(t)<\varepsilon^2.$$

Obsérvese que, sin embargo, en este caso no hay estabilidad asintótica, ya que en (4.11) $x(t)$ e $y(t)$ no tienden a cero cuando $t\to\infty$.

c) *Las raíces son múltiples:* $k_1=k_2$.

1) $k_1=k_2<0$.

La solución general tiene la forma

$$x(t)=(c_1\alpha_1+c_2\beta_1 t)e^{k_1 t},$$
$$y(t)=(c_1\alpha_2+c_2\beta_2 t)e^{k_1 t};$$

además no se excluye la posibilidad de que $\beta_1=\beta_2=0$, en cuyo caso α_1 y α_2 serán constantes arbitrarias.

Debido al factor $e^{k_1 t}$, que tiende rápidamente a cero cuando $t \to \infty$, el producto $(c_1\alpha_i + c_2\beta_i t) e^{k_1 t}$ $(i = 1, 2)$ tiende a cero cuando $t \to \infty$, y para un valor de t suficientemente grande, todos los puntos de cualquier δ—entorno del origen de coordenadas caen en un ε—entorno dado de dicho punto; por consiguiente, el punto de reposo es asintóticamente estable. En la fig. 4.7 está representado un punto de reposo del tipo considerado, llamado, al igual que en el caso a) 1), *nudo estable*. Este nudo ocupa una posición intermedia entre el nudo a) 1) y el foco b) 1), puesto

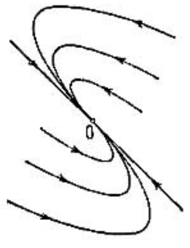
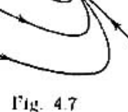



Fig. 4.7

Fig. 4.8

que para cualquier variación arbitrariamente pequeña de los coeficientes reales a_{11}, a_{12}, a_{21} y a_{22}, puede transformarse tanto en un foco estable como en un nudo estable del tipo a) 1), debido a que para cualquier variación arbitrariamente pequeña de los coeficientes, la raíz múltiple puede transformarse tanto en un par de raíces complejas conjugadas, como en un par de raíces reales diferentes. Si $\beta_1 = \beta_2 = 0$, entonces también se obtiene un nudo estable (llamado *nudo dicrítico*), representado en la fig. 4.8.

2) Si $k_1 = k_2 > 0$, la sustitución de t por $-t$ conduce al caso precedente. Por lo tanto, las trayectorias no se diferencian de las del caso anterior, representadas en las figs. 4.7 y 4.8, pero el movimiento por éstas se efectúa en sentido contrario. En este caso el punto de reposo se llama *nudo inestable*, igual que en el caso a) 2).

Con esto quedan agotadas todas las posibilidades, ya que el caso $k_1 = 0$ (ó $k_2 = 0$) está excluido en virtud de la condición

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Observación 1. Si

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

entonces la ecuación característica

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-k \end{vmatrix} = 0$$

tiene la raíz nula $k_1=0$. Supongamos que $k_1=0$, pero $k_2\neq 0$. Entonces la solución general del sistema (4.6) tiene la forma

$$x=c_1\alpha_1+c_2\beta_1e^{k_2t},$$
$$y=c_1\alpha_2+c_2\beta_2e^{k_2t}.$$

Eliminando t, obtenemos la familia de rectas paralelas $\beta_1(y-c_1\alpha_2)=\beta_2(x-c_1\alpha_1)$. Cuando $c_2=0$, obtenemos una familia monoparamétrica de puntos de reposo, situados en la recta $\alpha_1 y=\alpha_2 x$. Si $k_2<0$, entonces, cuando $t\to\infty$, en cada trayectoria los puntos se aproximan al punto de reposo $x=c_1\alpha_1$, $y=c_1\alpha_2$, que se halla en dicha trayectoria (fig. 4.9). El punto de reposo $x=0$, $y=0$ es estable, pero no hay estabilidad asintótica.

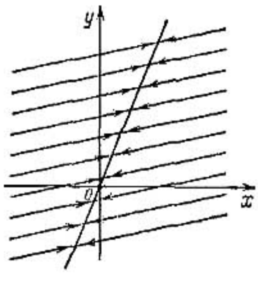


Fig. 4.9

Si, en cambio, $k_2>0$, las trayectorias están dispuestas de la misma forma, pero el movimiento de los puntos por las mismas se efectúa en sentido contrario, y el punto de reposo $x=0$, $y=0$ es inestable.

Si $k_1=k_2=0$, son posibles dos casos:

1. La solución general del sistema (4.6) tiene la forma $x=c_1$, $y=c_2$; todos los puntos son puntos de reposo. Todas las soluciones son estables.

2. La solución general tiene la forma

$$x=c_1+c_2t,\quad y=c_1^*+c_2^*t,$$

donde c_1^* y c_2^* son combinaciones lineales de las constantes arbitrarias c_1 y c_2. El punto de reposo $x=0$, $y=0$ es inestable.

Observación 2. La clasificación de los puntos de reposo está estrechamente vinculada con la clasifiación de los puntos singulares (véanse las págs. 60—62).

En efecto, en el caso considerado, el sistema

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt}&=a_{11}x+a_{12}y,\\ \frac{dy}{dt}&=a_{21}x+a_{22}y, \end{aligned}\right\} \qquad (4.6)$$

donde

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

puede ser reducido, eliminando t, a la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{11}x + a_{12}y}, \tag{4.12}$$

cuyas curvas integrales coinciden con las trayectorias del movimiento del sistema (4.6). Entonces el punto de reposo $x=0$, $y=0$ del sistema (4.6) es punto singular de la ecuación (4.12).

Obsérvese que si ambas raíces de la ecuación característica tienen parte real negativa [casos a) 1); b) 1); c) 1)], el punto de reposo es asintóticamente estable. Si por lo menos una raíz de la ecuación característica tiene parte real positiva [casos a) 2); a) 3); b) 2); c) 2)], entonces el punto de reposo es inestable.

Afirmaciones análogas son válidas también para el sistema de n ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.13}$$

Si las partes reales de todas las raíces de la ecuación característica del sistema (4.13) son negativas, la solución trivial $x_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ es asintóticamente estable.

En efecto, las soluciones particulares que corresponden a cierta raíz k_s de la ecuación característica tienen la forma (págs. 197 y 200)

$$x_i = \alpha_i e^{k_s t} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

si las k_s son reales,

$$x_j = e^{p_s t}(\beta_j \cos q_s t + \gamma_j \operatorname{sen} q_s t),$$

cuando $k_s = p_s + q_s i$ y finalmente, en el caso de raíces múltiples, las soluciones tienen la misma forma, pero están multiplicadas además por ciertos polinomios $P_j(t)$. Es evidente que todas las soluciones de esta forma, si las partes reales de las raíces son negativas ($p_s < 0$ o bien, si k_s es real, $k_s < 0$), tienden a cero cuando $t \to \infty$ en forma no más lenta que ce^{-mt}, donde c es un factor constante y $-m < 0$, y mayor que la mayor parte real de las raíces de la ecuación característica. Por lo tanto, para un t suficientemente grande, los puntos de las trayectorias, cuyos valores iniciales se encuentran en un δ-entorno cualquiera del origen de coordenadas, caen en un ε-entorno arbitrariamente pequeño de dicho punto, y se aproximan indefinidamente al origen de coordenadas

cuando $t \to \infty$; es decir, el punto de reposo $x_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ es asintóticamente estable.

Si, en cambio, la parte real de por lo menos una raíz de la ecuación característica es positiva, $\operatorname{Re} k_i = p_i > 0$, la solución de la forma $x_j = c\alpha_j e^{k_i t}$, correspondiente a dicha raíz o, en caso de que k_i sea compleja, su parte real (o imaginaria) $ce^{p_i t}(\beta_j \cos q_i t + \gamma_j \operatorname{sen} q_i t)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ crecerá indefinidamente en valor absoluto al aumentar t para valores de c de módulo arbitrariamente pequeño y, por lo tanto, los puntos de estas trayectorias que se encuentran en el momento inicial en un δ-entorno arbitrariamente pequeño del origen de coordenadas abandonan, al aumentar t, cualquier ε-entorno dado de dicho punto. Por consiguiente, si la parte real de por lo menos una raíz de la ecuación característica es positiva, entonces el punto de reposo $x_j = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ del sistema (4.13) es inestable.

Ejemplo 1. ¿Qué tipo de punto de reposo tiene el sistema de ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = x - y,$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x + 3y?$$

La ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 1-k & -1 \\ 2 & 3-k \end{vmatrix} = 0,$$

o bien

$$k^2 - 4k + 5 = 0$$

tiene las raíces $k_{1,2} = 2 \pm i$; por lo tanto, el punto de reposo $x = 0$, $y = 0$ es un foco inestable.

Ejemplo 2. $\ddot{x} = -a^2x - 2b\dot{x}$ es la ecuación de oscilaciones elásticas, considerando el rozamiento o la resistencia del medio (para $b > 0$). Pasando al sistema de ecuaciones equivalente, obtenemos

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -a^2x - 2by$$

La ecuación característica tiene la forma

$$\begin{vmatrix} -k & 1 \\ -a^2 & -2b-k \end{vmatrix} = 0, \text{ o bien } k^2 + 2bk + a^2 = 0,$$

de donde $k_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - a^2}$.

Consideremos los casos siguientes:

1) $b = 0$, o sea que la resistencia del medio no se toma en cuenta. Todos los movimientos son periódicos. El punto de reposo en el origen de coordenadas es un centro.

2) $b^2 - a^2 < 0$, $b > 0$. El punto de reposo es un foco estable. Las oscilaciones son amortiguadas.

3) $b^2 - a^2 \geqslant 0$, $b > 0$. El punto de reposo es un nudo estable. Todas las soluciones son amortiguadas y no oscilan. Este caso tiene lugar si la resistencia del medio es muy fuerte $(b \geqslant a)$.

4) $b < 0$ (caso de rozamiento negativo), $b^2 - a^2 < 0$. El punto de reposo es un foco inestable.

5) $b < 0$, $b^2 - a^2 \geq 0$ (caso de rozamiento negativo grande). El punto de reposo es un nudo inestable.

Ejemplo 3. Investigar la estabilidad del punto de reposo del sistema de ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = 2y - z,$$

$$\frac{dy}{dt} = 3x - 2z,$$

$$\frac{dz}{dt} = 5x - 4y.$$

La ecuación característica tiene la forma

$$\begin{vmatrix} -k & 2 & -1 \\ 3 & -k & -2 \\ 5 & -4 & -k \end{vmatrix} = 0,$$

o bien

$$k^3 - 9k + 8 = 0.$$

Es bastante difícil determinar las raíces de una ecuación cúbica en el caso general; sin embargo, en el caso dado, una raíz se escoge con facilidad, $k_1 = 1$. Como ésta tiene parte real positiva, se puede asegurar que el punto de reposo $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ es inestable.

§ 3. SEGUNDO METODO DE A. M. LIAPUNOV

El eminente matemático ruso Alexandr Mijálovich Liapunov, a fines del siglo XIX desarrolló un método muy general de análisis de la estabilidad de las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{4.14}$$

el cual fue denominado *segundo método de Liapunov*.

Teorema 4.1 (teorema de Liapunov sobre la estabilidad). *Si existe una función derivable $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, llamada función de Liapunov, que satisface, en un entorno del origen de coordenadas, las siguientes condiciones:*

1) $v(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$, y $v = 0$ sólo cuando $x_i = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), es desir, la función v tiene un mínimo estricto en el origen de coordenadas;

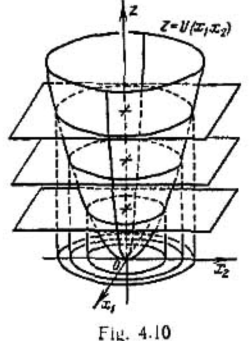
2) $\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \leq 0$ cuando $t \geq t_0$, entonces el punto de reposo $x_i = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) es estable.

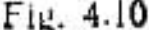
La derivada $\frac{dv}{dt}$ en la condición 2) se toma a lo largo de una curva integral, o sea que está calculada considerando que los argumentos x_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ de la función $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ han sido sustituidos por la solución $x_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ del sistema de ecuaciones diferenciales (4.14).

En efecto, bajo esta suposición $\frac{dv}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}$ o, sustituyendo $\frac{dx_i}{dt}$ por los segundos miembros del sistema (4.14), obtenemos finalmente

$$\frac{dv}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Demostración del teorema de Liapunov sobre la estabilidad. En un entorno del origen de coordenadas, al




Fig. 4.10

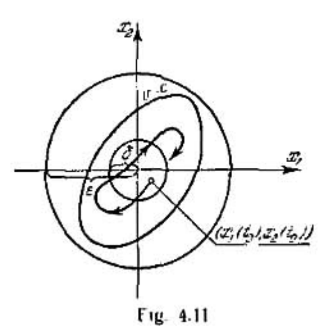


Fig. 4.11

igual que en un entorno de cualquier punto de mínimo estricto (fig. 4.10), las superficies de nivel $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)=c$ de la función $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ son superficies cerradas, que contienen en su interior al mínimo, es decir, al origen de coordenadas. Sea $\varepsilon>0$; para $c>0$ suficientemente pequeña, la superficie de nivel $v=c$ se encuentra enteramente dentro del ε-entorno del origen de coordenadas*), pero no pasa por dicho punto; por lo tanto, se puede tomar un $\delta>0$ tal que el δ-entorno del origen se encuentre enteramente

*) Más exactamente, por lo menos una componente cerrada de la superficie de nivel $v=c$ está contenida en el ε-entorno del origen de coordenadas.

dentro de la superficie $v=c$, siendo en este entorno $v<c$. Si el punto inicial con coordenadas $x_i(t_0)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ se toma en el δ-entorno del origen de coordenadas (fig. 4.11) y, por consiguiente, $v(x_1(t_0), x_2(t_0), \ldots, x_n(t_0))=c_1<c$, entonces, cuando $t\geqslant t_0$, el punto de la trayectoria, determinada por estas condiciones iniciales, no puede salir fuera de los límites del ε-entorno del origen de coordenadas, y aún de los límites de la superficie de nivel $v=c$, ya que debido a la condición 2) del teorema, la función v a lo largo de la trayectoria no crece y, por lo tanto, cuando $t\geqslant t_0$,

$$v(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))\leqslant c_1<c.$$

Observación. A. M. Liapunov demostró el teorema sobre la estabilidad bajo hipótesis más generales; en particular, consideró que la función v puede depender también de t: $v=v(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$. En este caso, para que se cumpla el teorema de la estabilidad, hay que sustituir la primera condición por la siguiente

$$v(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)\geqslant w(x_1, x_2, \ldots, x_n)\geqslant 0$$

en un entorno del origen de coordenadas, cuando $t\geqslant t_0$, donde la función continua w tiene un mínimo estricto en el origen, $v(t, 0, 0, \ldots, 0)=w(0, 0, \ldots, 0)=0$; la segunda condición es la misma, $\frac{dv}{dt}\leqslant 0$, sólo que en este caso

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\partial v}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

El esquema de la demostración queda igual; sólo hay que tomar en cuenta que debido a la condición 1) la superficie de nivel, que varía al variar t, $v(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)=c$, permanece dentro de la superficie de nivel $w(x_1, x_2, \ldots, x_n)=c$ para todo valor de $t\geqslant t_0$ (fig. 4.12).

Teorema 4.2 (teorema de Liapunov sobre la estabilidad asintótica). *Si existe una función derivable de Liapunov $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que satisfaga las condiciones:*

1) $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tiene un mínimo estricto en el origen de coordenadas: $v(0, 0, \ldots, 0)=0$;

2) la derivada de la función v, calculada a lo largo de las curvas integrales del sistema (4.14)

$$\frac{dv}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)\leqslant 0,$$

y fuera de un entorno arbitrariamente pequeño del origen de

coordenadas, o sea para $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant \delta_1^2 > 0$, $t \geqslant T_0 \geqslant t_0$, *la derivada* $\frac{dv}{dt} \leqslant -\beta < 0$, *donde* β *es una constante, entonces el punto de reposo* $x_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *del sistema* (4.14) *es asintóticamente estable.*

Demostración. Como las condiciones del teorema sobre la estabilidad se cumplen, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que la trayectoria, cuyo punto inicial se encuentre en el

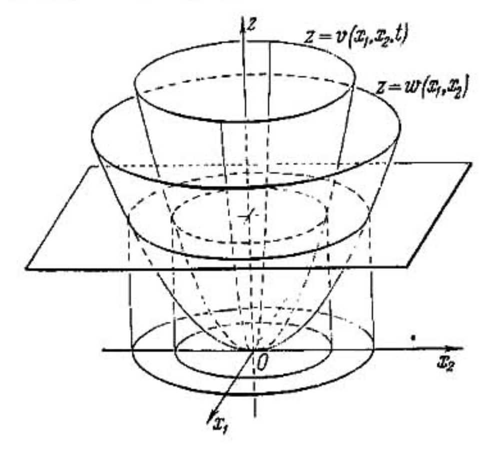


Fig. 4.12

δ-entorno del origen de coordenadas, no salga de los límites del ε-entorno de dicho punto, para $t \geqslant t_0$. Por consiguiente, cuando $t > T_0$, se cumple en particular la condición 2) a lo largo de esta trayectoria; por ello, a lo largo de ésta la función v decrece monótonamente al aumentar t, y existe el límite de la función v cuando $t \to \infty$:

$$\lim_{t \to \infty} v(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) = \alpha \geqslant 0.$$

Hay que demostrar que $\alpha = 0$, puesto que entonces de la condición 1) se tendrá que $\lim_{t \to \infty} x_i(t) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, o sea que el punto de reposo $x_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ es asintóticamente estable. Supongamos que $\alpha > 0$; entonces la trayectoria para $t > t_0$

se encuentra en la región $v \geqslant \alpha$ y, por lo tanto, fuera de un cierto δ_1-entorno del origen de coordenadas, o sea en donde, según la condición 2), $\frac{dv}{dt} \leqslant -\beta < 0$ para $t \geqslant T_0$. Multiplicando la desigualdad $\frac{dv}{dt} \leqslant -\beta$ por dt e integrando a lo largo de la trayectoria desde T_0 hasta t, obtenemos

$$v(x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots,\ x_n(t)) - v(x_1(T_0),\ x_2(T_0),\ \ldots,\ x_n(T_0)) \leqslant \leqslant -\beta(t-T_0),$$

o bien

$$v(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \leqslant v(x_1(T_0), x_2(T_0), \ldots, x_n(T_0)) - \beta(t-T_0).$$

Para un valor de t suficientemente grande, el segundo miembro es negativo y, por consiguiente, $v(x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots,\ x_n(t)) < 0$, lo cual contradice a la condición 1).

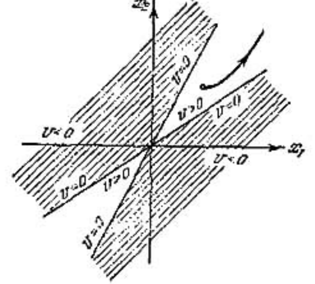


Fig. 4.13

Observación. El teorema sobre la estabilidad asintótica se generaliza al caso cuando la función v depende de t, x_1, x_2, $\ldots$, x_n, si la primera condición, como en el teorema anterior, se sustituye por

$$v(t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \geqslant w(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \geqslant 0,$$

donde la función w tiene un mínimo estricto en el origen de coordenadas y, aparte de esto, si se exige que la función $v(t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ tienda a cero cuando $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \to 0$, uniformemente con respecto a t.

Teorema 4.3 (teorema de Chetáev sobre la inestabilidad). *Si existe una función derivable $v(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ que satisfaga en cierto h-entorno cerrado del origen de coordenadas las condiciones: 1) en un entorno arbitrariamente pequeño U del origen de coordenadas, existe una región $(v > 0)$, en la cual $v > 0$, y $v = 0$ en la parte de la frontera de la región $(v > 0)$ que se encuentra en U; 2) en la región $(v > 0)$ la derivada*

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) > 0,$$

y en la región ($v \geqslant \alpha$), $\alpha > 0$, *la derivada* $\frac{dv}{dt} \geqslant \beta > 0$, *entonces el punto de reposo* $x_i = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) *del sistema* (4.14) *es inestable*.

Demostración. Tomemos el punto inicial $x_1(t_0), x_2(t_0), \ldots, x_n(t_0)$ en un entorno arbitrariamente pequeño del origen de coordenadas, en la región ($v > 0$), $v(x_1(t_0), x_2(t_0), \ldots, x_n(t_0)) = \alpha > 0$ (fig. 4.13). Debido a que $\frac{dv}{dt} \geqslant 0$ a lo largo de la trayectoria, la función v no decrece a lo largo de la misma y, por lo tanto, mientras la trayectoria no abandone el h-entorno considerado del origen de coordenadas, en el cual se cumplen las condiciones del teorema, la trayectoria debe permanecer en la región ($v \geqslant \alpha$). Supongamos que la trayectoria no abandona el h-entorno del origen. Entonces, debido a la condición 2), la derivada $\frac{dv}{dt} \geqslant \beta > 0$ a lo largo de la trayectoria para $t \geqslant t_0$. Multiplicando esta desigualdad por dt e integrando, obtenemos:

$$v(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) - v(x_1(t_0), x_2(t_0), \ldots, x_n(t_0)) \geqslant \beta(t - t_0),$$

de donde se deduce que cuando $t \to \infty$ la función v crece indefinidamente a lo largo de la trayectoria, lo cual se encuentra en contradicción con la condición de que la trayectoria no sale fuera de los límites del h-entorno cerrado del origen, ya que en este entorno la función continua v está acotada.

Observación. N. G. Chetáev demostró el teorema de la inestabilidad considerando que v puede depender también de t; en este caso la hipótesis del teorema cambia un tanto, haciéndose necesario, en particular, exigir la acotación de la función v en la región ($v \geqslant 0$) en el h-entorno considerado del origen.

Ejemplo 1. Analizar la estabilidad de la solución trivial del sistema:

$$\frac{dx}{dt} = -y - x^3, \quad \frac{dy}{dt} = x - y^3.$$

La función $v(x, y) = x^4 + y^2$ satisface las condiciones del teorema de A. M. Liapunov sobre la estabilidad asintótica:

1) $v(x, y) \geqslant 0$, $v(0, 0) = 0$;

2) $\frac{dv}{dt} = 2x(-y - x^3) + 2y(x - y^3) = -2(x^4 + y^4) \leqslant 0$. Fuera de un entorno del origen de coordenadas es $\frac{dv}{dt} \leqslant -\beta < 0$ Por lo tanto, la solución $x = 0$, $y = 0$ es asintóticamente estable.

Ejemplo 2. Analizar la estabilidad de la solución trivial $x = 0$, $y = 0$ del sistema:

$$\frac{dx}{dt} = -xy^4, \quad \frac{dy}{dt} = yx^4.$$

La función $v(x, y)=x^4+y^4$ satisface las condiciones del teorema de A. M. Liapunov sobre la estabilidad:

1) $v(x, y)=x^4+y^4 \geqslant 0, \quad v(0, 0)=0;$

2) $\frac{dv}{dt}=-4x^4y^4+4x^4y^4=0$

Por consiguiente, la solución trivial $x=0$, $y=0$ es estable.

Ejemplo 3. Analizar la estabilidad del punto de reposo $x=0$, $y=0$ del sistema de ecuaciones

$$\frac{dx}{dt}=y^3+x^5,$$

$$\frac{dy}{dt}=x^3+y^5.$$

La función $v=x^4-y^4$ satisface las condiciones del teorema de N. G. Chetáev:

1) $v>0$, cuando $|x|>|y|$;

2) $\frac{dv}{dt}=4x^3(y^3+x^5)-4y^3(x^3+y^5)=4(x^8-y^8)>0$ para $|x|>|y|$, y para $v \geqslant \alpha>0$, es $\frac{dv}{dt} \geqslant \beta>0$. Por lo tanto, el punto de reposo $x=0$, $y=0$ es inestable.

Ejemplo 4. Analizar la estabilidad de la solución trivial $x_i=0$ ($i=1, 2, \ldots, n$) del sistema de ecuaciones

$$\frac{dx_i}{dt}=-\frac{\partial u(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i} \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

si la función $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tiene un máximo estricto en el origen de coordenadas.

Tomemos como función de Liapunov la diferencia

$$v(x_1, x_2, \ldots, x_n)=u(0, 0, \ldots, 0)-u(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

la cual, evidentemente, se anula para $x_i=0$ ($i=1, 2, \ldots, n$) y tiene un mínimo estricto en el origen de coordenadas. Por lo tanto, esta función satisface la condición 1) del teorema de Liapunov sobre la estabilidad. La derivada a lo largo de las curvas integrales es

$$\frac{dv}{dt}=-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}=-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 \leqslant 0.$$

De este modo, las condiciones del teorema de Liapunov se cumplen: por lo tanto, la solución trivial es estable.

Ejemplo 5. Estudiar la estabilidad de la solución trivial $x_i=0$ ($i=1, 2, \ldots, n$) del sistema de ecuaciones

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j, \quad \text{donde } a_{ij}(t)=-a_{ji}(t) \text{ para } i \neq j \text{ y todas las } a_{ii}(t) \leqslant 0.$$

La solución trivial es estable, puesto que la función $v=\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ satisface las condiciones del teorema de Liapunov sobre la estabilidad:

1) $v \geq 0$ y $v(0, 0, \ldots, 0) = 0$;

2) $\frac{dv}{dt} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{dx_i}{dt} = 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_i x_j = 2\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t) x_i^2 \leq 0.$

§ 4. ANALISIS DE LA ESTABILIDAD POR LA PRIMERA APROXIMACION

Para el análisis de la estabilidad del punto de reposo $x_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.14}$$

donde f_i es una función derivable en un entorno del origen de coordenadas, se aplica con frecuencia el siguiente método: como la función $f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es derivable, el sistema (4.14) en un entorno del origen de coordenadas $x_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ puede representarse en la forma

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j + R_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \, (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.15}$$

donde las R_i son infinitésimos de orden mayor que 1 con respecto a $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$; luego de esto, en lugar de investigar la estabilidad del punto de reposo $x_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ del sistema (4.15), se analiza la estabilidad de este mismo punto del sistema lineal

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.16}$$

llamado *sistema de ecuaciones de primera aproximación* respecto al sistema (4.15). Las condiciones de aplicabilidad de este método, utilizado durante mucho tiempo sin ninguna base, fueron analizadas detalladamente por A. M. Liapunov, y posteriormente generalizadas por muchos otros matemáticos, entre los cuales cabe nombrar en primer lugar a O. Perron, I. G. Malkin, K. P. Persidski y N. G. Chetáev.

El análisis de la estabilidad del sistema de ecuaciones de primera aproximación, claro está, es un problema mucho más fácil que el estudio del sistema original, en general no lineal; sin embargo, aún la investigación del sistema lineal (4.16) con coeficientes $a_{ij}(t)$ variables es un problema muy complejo. Si, en cambio, todas las a_{ij} son constantes, es decir, si el sistema es estacionario en primera aproximación, la investigación de la estabilidad del sistema lineal (4.16) no posee dificultades principiales (véanse las págs. 217—218).

Teorema 4.4. *Si el sistema de ecuaciónes* (4.15) *es estacionario en primera aproximación, si todos los términos* R_i, *en un entorno suficientemente pequeño del origen de coordenadas, cuando* $t \geqslant T \geqslant t_0$, *satisfacen las desigualdades* $|R_i| \leqslant N\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}+\alpha}$, *donde* N *y* α *son constantes, y* $\alpha > 0$ $\left(\text{o sea, si las } R_i \text{ no dependen de } t, \text{ entonces su orden es mayor que 1 con respecto a } \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right)$ *y si todas las raíces de la ecuación característica:*

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-k \end{vmatrix} = 0 \qquad (4.17)$$

tienen partes reales negativas, entonces las soluciones triviales $x_i \equiv 0$ $(i=1, 2, \dots, n)$ *del sistema de ecuaciones* (4.15) *y del sistema* (4.16) *son asintóticamente estables; por lo tanto, en este caso es posible el análisis de la estabilidad por la primera aproximación.*

Teorema 4.5. *Si el sistema de ecuaciones* (4.15) *es estacionario en primera aproximación, si todas las funciones* R_i *satisfacen las condiciones del teorema anterior y si por lo menos una raíz de la ecuación característica* (4.17) *tiene parte real positiva, entonces los puntos de reposo* $x_i \equiv 0$ $(i=1, 2, \dots, n)$ *del sistema* (4.15) *y del* (4.16) *son inestables. En consecuencia, en este caso también es posible investigar la estabilidad por la primera aproximación.*

Los teoremas 4.4 y 4.5, desde el punto de vista de las limitaciones que imponen a las raíces de la ecuación característica, no abarcan solamente el llamado caso crítico, o sea, cuando todas las partes reales de las raíces de la ecuación característica no son positivas, y además la parte real de por lo menos una raíz es igual a cero.

En el caso crítico los términos no lineales R_i comienzan a influir sobre la estabilidad de la solución trivial del sistema (4.15) y la investigación de la estabilidad por la primera aproximación, en general, no es posible.

La demostración de los teoremas 4.4 y 4.5 se pueden encontrar en el libro de I. G. Malkin.

Para dar una idea de los métodos de demostración de estos teoremas, daremos la demostración del teorema 4.4, suponiendo que todas las raíces k_i de la ecuación característica son reales y diferentes,

$$k_i < 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad k_i \neq k_j \text{ para } i \neq j.$$

En notaciones vectoriales, el sistema (4.15) y el (4.16) toman respectivamente las formas

$$\frac{dX}{dt} = AX + R, \qquad (4.15_1)$$

$$\frac{dX}{dt} = AX. \qquad (4.16_1)$$

donde

$$X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{Vmatrix}, \qquad A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}, \quad R = \begin{Vmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ R_n \end{Vmatrix}.$$

Mediante la transformación lineal no degenerada con coeficientes constantes $X = BY$, donde

$$B = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{Vmatrix}, \quad Y = \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{Vmatrix}.$$

el sistema (4.16_1) se reduce a la forma $B\frac{dY}{dt} = ABY$, o bien $\frac{dY}{dt} = B^{-1}ABY$. La matriz B se escoge de manera que $B^{-1}AB$ sea diagonal:

$$B^{-1}AB = \begin{Vmatrix} k_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_n \end{Vmatrix}.$$

Entonces el sistema (4.16) se reduce a

$$\frac{dy_i}{dt} = k_i y_i \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

y el sistema (4.15), mediante la misma transformación, se reduce a

$$\frac{dy_i}{dt} = k_i y_i + \overline{R}_i (t, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \qquad (4.18)$$

donde $|\overline{R}_i| \leqslant N \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right)^{\frac{1}{2} + \alpha}$, siendo $\overline{N}$ una magnitud constante, $\alpha > 0$, $t \geqslant T$.

Para el sistema (4.18) una función de Liapunov que satisface las condiciones del teorema sobre la estabilidad asintótica es

$$v = \sum_{i=1}^{n} y_i^2.$$

En efecto,

1) $v(y_1, y_2, \dots, y_n) \geqslant 0$, $v(0, 0, \dots, 0) = 0$;

2) $\frac{dv}{dt} = 2\sum_{i=1}^{n} y_i \frac{dy_i}{dt} = 2\sum_{i=1}^{n} k_i y_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} k_i y_i R_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} k_i y_i^2 \leqslant 0$

para y_i suficientemente pequeñas, debido a que todas las $k_i<0$ y a que la suma duplicada $2\sum\limits_{i=1}^{n} k_i y_i R_i$ para y_i suficientemente pequeñas puede hacerse menor que la suma $\sum\limits_{i=1}^{n} k_i y_i^2$ en valor absoluto.

Por último, fuera de un entorno del origen de coordenadas es

$$\frac{dv}{dt}\leqslant-\beta<0.$$

E j e m p l o 1. Analizar la estabilidad del punto de reposo $x=0$, $y=0$ del sistema

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=x-y+x^2+y^2\operatorname{sen} t,\\ \frac{dy}{dt}&=x+y-y^2.\end{aligned}\right\}\tag{4.19}$$

Los términos no lineales satisfacen las condiciones de los teoremas 4.4 y 4.5. Analicemos la estabilidad del punto de reposo $x=0$, $y=0$ del sistema de primera aproximación

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=x-y,\\ \frac{dy}{dt}&=x+y.\end{aligned}\right\}\tag{4.20}$$

La ecuación característica $\begin{vmatrix}1-k & -1\\ 1 & 1-k\end{vmatrix}=0$ tiene las raíces $k_{1,2}=1\pm i$; por lo tanto, en virtud del teorema 4.5, el punto de reposo de los sistemas (4.19) y (4.20) es inestable.

E j e m p l o 2. Analizar la estabilidad del punto de reposo $x=0$, $y=0$ del sistema

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=2x+8\operatorname{sen} y,\\ \frac{dy}{dt}&=2-e^x-3y-\cos y.\end{aligned}\right\}\tag{4.21}$$

Desarrollando $\operatorname{sen} y$, e^x y $\cos y$ por la fórmula de Taylor, escribimos el sistema en la forma

$$\frac{dx}{dt}=2x+8y+R_1,\quad \frac{dy}{dt}=-x-3y+R_2,$$

donde R_1 y R_2 satisfacen las condiciones de los teoremas 4.4 y 4.5.

Las raíces de la ecuación característica $\begin{vmatrix}2-k & 8\\ -1 & -3-k\end{vmatrix}=0$ para el sistema de primera aproximación

$$\frac{dx}{dt}=2x-8y,\quad \frac{dy}{dt}=-x-3y\tag{4.22}$$

tienen partes reales negativas. Por lo tanto, el punto de reposo $x=0$, $y=0$ de los sistemas (4.21) y (4.22) es asintóticamente estable.

Ejemplo 3. Analizar la estabilidad del punto de reposo $x=0$, $y=0$ del sistema

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=-4y-x^3,\\ \frac{dy}{dt}&=3x-y^3.\end{aligned}\right\}\tag{4.23}$$

La ecuación característica $\begin{vmatrix}-k & -4\\ 3 & -k\end{vmatrix}=0$ del sistema de primera aproximación tiene raíces imaginarias puras, es decir, se tiene un caso crítico. El análisis por la primera aproximación no es posible. En este caso es fácil escoger la función de Liapunov

$$v=3x^2+4y^2.$$

1) $v(x,\ y)\geqslant 0$, $v(0,\ 0)=0$;

2) $\frac{dv}{dt}=6x(-4y-x^3)+8y(3x-y^3)=-(6x^4+8y^4)\leqslant 0$,

y fuera de cierto entorno del origen de coordenadas es $\frac{dv}{dt}\leqslant-\beta<0$. Por consiguiente, el punto de reposo $x=0$, $y=0$, en virtud del teorema del parágrafo anterior, es asintóticamente estable.

Detengámosnos más detalladamente en el último ejemplo. El sistema de ecuaciones de primera aproximación

$$\frac{dx}{dt}=-4y,\quad \frac{dy}{dt}=3x\tag{4.24}$$

tenía un centro en el origen de coordenadas. Los términos no lineales del sistema (4.23) transformaron este centro en un foco estable.

En el caso general también se observa un cuadro geométrico análogo, pero un tanto más complicado. Supongamos que el sistema de primera aproximación para el sistema

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+R_1(x_1,\ x_2),\\ \frac{dx_2}{dt}&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+R_2(x_1,\ x_2)\end{aligned}\right\}\tag{4.25}$$

tiene un punto de reposo tipo centro en el origen de coordenadas. Supongamos, también, al igual que en la pág. 226, que los términos no lineales $R_1(x_1,\ x_2)$ y $R_2(x_1,\ x_2)$ son de orden mayor que 1 con respecto a $\sqrt{x_1^2+x_2^2}$. Estos términos no lineales son, en un entorno suficientemente pequeño del origen de coordenadas, pequeños con respecto a los términos lineales, pero de todos modos éstos deforman un poco el campo direccional determinado por el sistema lineal de ecuaciones de primera aproximación. Por eso la trayectoria que sale de cierto punto $(x_0,\ y_0)$ se desvía un tanto después de dar una vuelta alrededor del origen de coordenadas, con respecto a la trayectoria del sistema lineal que pasa por el mismo punto y, en general, no cae en el punto $(x_0,\ y_0)$, es decir, la trayectoria no se cierra.

Si después de esta vuelta alrededor del origen todas las trayectorias se acercan al mismo, entonces en el origen surge un foco estable; si, en cambio, las trayectorias se alejan del origen, surge un foco inestable.

Como excepción, es posible también el caso en que todas las trayectorias del sistema no lineal, situadas en un entorno del origen de coordenadas, sigan siendo cerradas. Sin embargo, hay que considerar que el caso más típico es cuando sólo algunas curvas cerradas (puede ser que ningunas) permanezcan cerradas, y las restantes se conviertan en espirales.

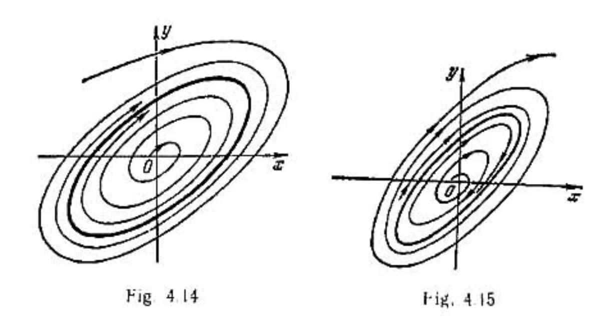


Fig. 4.14 Fig. 4.15

Tales trayectorias cerradas, en cuyo entorno todas las trayectorias son espirales, se llaman *ciclos límite*.

Si las trayectorias próximas al ciclo límite son espirales que se aproximan al ciclo cuando $t \to \infty$, entonces éste se llama *estable* (fig. 4.14); si las trayectorias cercanas al ciclo límite son espirales que se alejan del mismo cuando $t \to \infty$, entonces éste se llama *inestable*; si por un lado del ciclo límite las espirales se acercan al mismo cuando $t \to \infty$ y por el otro se alejan de él (fig. 4.15), entonces el ciclo límite se llama *semiestable*.

De esta manera, el paso del sistema de primera aproximación (4.16) al sistema (4.25) conduce, en general, a la transformación del centro en un foco, rodeado de p ciclos límite (el caso $p=0$ no se excluye).

En la pág. 157, al investigar las soluciones periódicas del sistema cuasilineal autónomo

$$\ddot{x}+a^2x=\mu f(x, \dot{x}, \mu), \tag{4.26}$$

ya nos encontramos con un fenómeno análogo. En efecto,

sustituyendo (4.26) por el sistema equivalente se obtiene

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -a^2x + \mu f(x, y, \mu) \end{aligned}\right\} \qquad (4.27)$$

El sistema lineal correspondiente:

$$\dot{x} = y, \ \dot{y} = -a^2x$$

tiene un punto de reposo tipo centro en el origen de coordenadas; al agregar términos no lineales, pequeños para μ pequeños, el centro se convierte, en general, en un foco rodeado de algunos ciclos límite, cuyos radios precisamente se determinan de la primera ecuación de (2.128), pág. 159.

La diferencia entre los casos (4.25) y (4.27) consiste sólo en que los términos R_1 y R_2 son pequeños solamente en un entorno suficientemente pequeño del origen de coordenadas, mientras que en el caso (4.27) el sumando $\mu f(x, y, \mu)$ puede hacerse pequeño para μ suficientemente pequeño no sólo en un entorno pequeño del origen de coordenadas.

En el ejemplo 2 (pág. 159) para pequeños μ surge un ciclo límite en un entorno de la circunferencia de radio 6 con centro en el origen de coordenadas, que es una trayectoria de la ecuación generadora.

En las aplicaciones, a los ciclos límite estables les corresponden comúnmente procesos auto-oscilatorios, o sea procesos periódicos en los cuales pequeñas perturbaciones no cambian prácticamente la amplitud y la frecuencia de las oscilaciones.

§ 5. CRITERIOS DE NEGATIVIDAD DE LAS PARTES REALES DE TODAS LAS RAICES DE UN POLINOMIO

En el parágrafo anterior el problema sobre la estabilidad de la solución trivial de una amplia clase de sistemas de ecuaciones diferenciales fue reducido al análisis de los signos de las partes reales de las raíces de la ecuación característica.

Si la ecuación característica es de grado elevado, entonces su resolución es muy difícil; por ello tienen gran importancia los métodos que permiten determinar si las raíces tendrán o no parte real negativa, sin resolver la ecuación.

Teorema 4.6 (teorema de Hurwitz). *La condición necesaria y suficiente para que las partes reales de todas las raíces del polinomio*

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$$

con coeficientes reales sean negativas, es que todos los menores dia-

gonales principales de la matriz de Hurwitz

$$\begin{Vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & \dots & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{Vmatrix}$$

sean positivas.

En la diagonal principal de la matriz de Hurwitz están los coeficientes del polinomio, tomados en su orden de numeración, desde a_1 hasta a_n. Las columnas están formadas sucesivamente por coeficientes con índices sólo pares o sólo impares, incluyendo también el coeficiente $a_0 = 1$; por lo tanto, el elemento b_{ik} de la matriz es $b_{ik} = a_{2i-k}$. Todos los coeficientes que faltan, es decir, los coeficientes con índices mayores que n ó menores que 0, se sustituyen por ceros.

Designemos los menores diagonales principales de la matriz de Hurwitz de la siguiente manera:

$$\Delta_1 = |a_1|, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \dots$$

$$\dots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & \\ a_5 & a_4 & a_3 & \dots & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

Obsérvese que, como $\Delta_n = \Delta_{n-1} a_n$, la última de las condiciones $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$ de Hurwitz puede sustituirse por $a_n > 0$ *).

Apliquemos el teorema de Hurwitz a los polinomios de segundo, tercero y cuarto grado.

a) $z^2 + a_1 z + a_2$.

Las condiciones de Hurwitz se reducen a $a_1 > 0$, $a_2 > 0$. Estas desigualdades en el espacio de los coeficientes a_1 y a_2 determinan el primer cuadrante (fig. 4.16). En la fig. 4.16 se representa la región de estabilidad asintótica de la solución trivial de cierto sistema de ecuaciones diferenciales que satisface las condiciones del teorema 4.1, si $z^2 + a_1 z + a_2$ es su polinomio característico.

b) $z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3$.

*) Obsérvese que de las condiciones de Hurwitz se deduce que todas las $a_i > 0$; sin embargo, la positividad de todos los coeficientes no es suficiente para que las partes reales de todas las raíces sean negativas.

Las condiciones de Hurwitz se reducen a $a_1 > 0$, $a_1a_2 - a_3 > 0$, $a_3 > 0$. La región determinada por estas desigualdades en el espacio de los coeficientes está representada en la fig. 4.17.

c) $z^4 + a_1z^3 + a_2z^2 + a_3z + a_4$.

Las condiciones de Hurwitz se reducen a

$$a_1 > 0,\ a_1a_2 - a_3 > 0,\ (a_1a_2 - a_3)a_3 - a_1^2a_4 > 0,\ a_4 > 0.$$

Para los polinomios considerados, las condiciones de Hurwitz son muy cómodas y de fácil comprobación, pero al aumentar el grado del polinomio, dichas condiciones se complican con gran rapidez, y frecuentemente en lugar de éstas es mejor aplicar otros criterios de negatividad de las partes reales de un polinomio.

Fig. 4.16

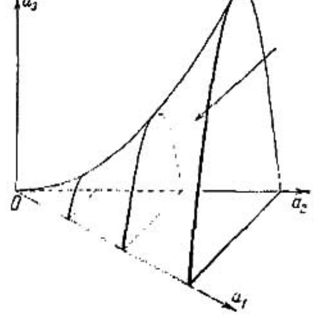


Fig. 4.17

Ejemplo. ¿Para qué valores del parámetro α la solución trivial $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx_1}{dt} = x_3,\quad \frac{dx_2}{dt} = -3x_1,\quad \frac{dx_3}{dt} = \alpha x_1 + 2x_2 - x_3$$

es asintóticamente estable?

La ecuación característica tiene la forma

$$\begin{vmatrix} -k & 0 & 1 \\ -3 & -k & 0 \\ \alpha & 2 & -1-k \end{vmatrix} = 0, \text{ o bien } k^3 + k^2 - \alpha k + 6 = 0.$$

Según el criterio de Hurwitz, las condiciones de estabilidad asintótica serán $a_1 > 0$, $a_1a_2 - a_3 > 0$, $a_3 > 0$. Estas condiciones en este caso se reducen a $-\alpha - 6 > 0$, de donde $\alpha < -6$.

§ 6. CASO DE UN COEFICIENTE PEQUEÑO EN LA DERIVADA DE ORDEN MAYOR

El teorema sobre la dependencia continua de la solución con respecto al parámetro (véase la pág. 56) afirma que la solución de la ecuación diferencial $\dot{x}(t)=f(t, x(t), \mu)$ depende en forma continua del parámetro μ si en la región cerrada de variación de t, x y μ considerada la función f es continua respecto a sus argumentos en conjunto, y satisface la condición de Lipschitz respecto a x:

$$|f(t, \bar{x}, \mu)-f(t, x, \mu)| \leqslant N|\bar{x}-x|,$$

donde N no depende de t, x y μ.

En los problemas de la física y la mecánica las condiciones de este teorema generalmente se cumplen; sin embargo, en las aplicaciones se encuentra con relativa frecuencia un caso de dependencia discontinua del segundo miembro con respecto al parámetro, a cuyo estudio precisamente se dedica este parágrafo.

Consideremos la ecuación

$$\mu \frac{dx}{dt}=f(t, x), \tag{4.28}$$

donde μ es un parámetro pequeño. El problema consiste en aclarar si se puede o no despreciar el término $\mu \frac{dx}{dt}$ para pequeños valores de $|\mu|$, es decir, sustituir aproximadamente la solución de la ecuación (4.28) por la solución de la llamada ecuación degenerada

$$f(t, x)=0. \tag{4.29}$$

Aquí no se puede aplicar el teorema sobre la dependencia continua de la solución con respecto al parámetro, puesto que el segundo miembro de la ecuación

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{\mu} f(t, x) \tag{4.28$_1$}$$

es discontinuo cuando $\mu=0$.

Supongamos por ahora, para simplificar, que la ecuación degenerada (4.29) tiene sólo una solución $x=\varphi(t)$. Supongamos también, para fijar ideas, que $\mu>0$. Cuando el parámetro μ tiende a cero, la derivada $\frac{dx}{dt}$ de las soluciones de la ecuación $\frac{dx}{dx}=\frac{1}{\mu} f(t, x)$, en cada punto en el cual $f(t, x) \neq 0$, crecerá indefinidamente en valor absoluto, teniendo el mismo signo que la función $f(t, x)$. Por consiguiente, las tangentes a las curvas integrales en todos los puntos en los cuales $f(t, x) \neq 0$, cuando $\mu \rightarrow 0$ tienden a una dirección paralela al eje Ox; además, si $f(t, x)>0$, la solución $x(t, \mu)$ de

la ecuación (4.28_1) crece al aumentar t, puesto que $\frac{dx}{dt} > 0$, y si $f(t, x) < 0$, la solución $x(t, \mu)$ decrece al decrecer t, ya que $\frac{dx}{dt} < 0$.

Consideremos el caso a) representado en la fig. 4.18, en el cual el signo de la función $f(t, x)$ cambia de + a — al cruzar la gráfica de la solución $x = \varphi(t)$ de la ecuación degenerada, si x aumenta y t queda fijo.

El campo de direcciones de las tangentes a las curvas integrales, para un μ suficientemente pequeño, se indica con flechas. El campo

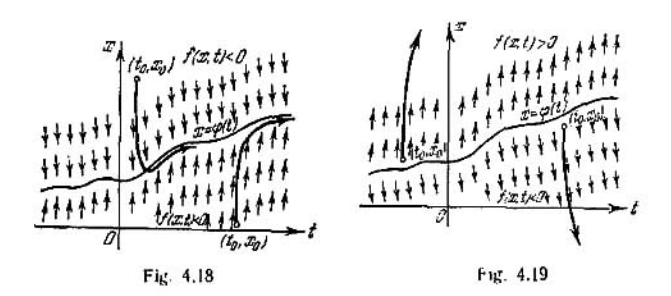


Fig. 4.18 Fig. 4.19

de direcciones tiende a la gráfica de la raíz de la ecuación degenerada. Por consiguiente, para cualesquiera valores iniciales $x(t_0) = x_0$, la curva integral que éstos determinan, que es casi paralela al eje de las Ox, tenderá a la gráfica de la raíz de la ecuación degenerada y, al crecer t, ya no podrá abandonar un entorno de esta gráfica. Por consiguiente, en este caso, cuando $t \geqslant t_1 > t_0$, para un μ suficientemente pequeño se puede sustituir aproximadamente la solución $x(t, \mu)$ de la ecuación (4.28) por la solución de la ecuación degenerada. En este caso, la solución $x = \varphi(t)$ de la ecuación degenerada se llama estable.

Consideremos el caso b). El signo de la función $f(t, x)$ cambia de — a + al cruzar la gráfica de la solución $x = \varphi(t)$ de la ecuación degenerada, si x aumenta y t queda fijo. En la fig. 4.19 está representado el campo direccional de las tangentes a las curvas integrales para μ suficientemente pequeño. En este caso es evidente que cualesquiera que sean los valores iniciales $x(t_0) = x_0$ que satisfagan sólo la condición $f(t_0, x_0) \neq 0$, la curva integral que éstos determinan, para un μ suficientemente pequeño se aleja, teniendo una tangente casi paralela al eje Ox, de la gráfica de la solución $x = \varphi(t)$ de la ecuación degenerada. En este caso, la solución $x = \varphi(t)$

de la ecuación (4.29) se llama inestable. En el caso de inestabilidad no se puede sustituir la solución $x=x(t,\mu)$ de la ecuación original por la de la ecuación degenerada; en otras palabras, no es posible despreciar el término $\mu\frac{dx}{dt}$ en la ecuación $\mu\frac{dx}{dt}=f(t,x)$, por pequeño que sea μ.

Es posible un tercer caso, llamado de semiestabilidad, el caso c): el signo de la función $f(t,x)$ no cambia al cruzar la gráfica de la solución de la ecuación degenerada. En la fig. 4.20 se representa el campo direccional en el caso de una solución semiestable $x=\varphi(t)$.

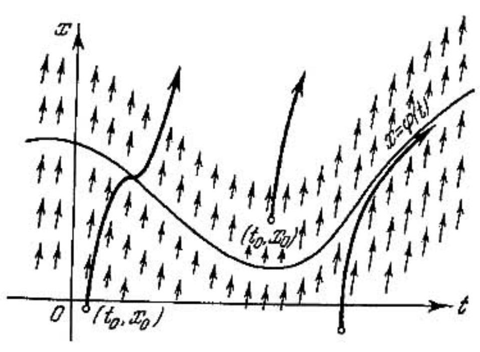


Fig. 4.20

En el caso de semiestabilidad, por regla general, tampoco es posible sustituir aproximadamente la solución $x=x(t,\mu)$ de la ecuación original por la de la ecuación degenerada, ya que, en primer lugar, las curvas integrales determinadas por las condiciones iniciales que se encuentran a un lado de la gráfica de la solución $x=\varphi(t)$, se alejan de dicha gráfica. En segundo lugar, las curvas integrales que se aproximan a la gráfica de la solución $x=\varphi(t)$ pueden atravesarla y pasar al lado inestable (fig. 4.20), y después alejarse de ésta. Por último, aún si la curva integral $x=x(t,\mu)$ permanece en un entorno de la gráfica de la solución por su lado estable, las perturbaciones, inevitables en los problemas prácticos, pueden hacer que la gráfica de la solución $x=x(t,\mu)$ pase al lado inestable de la gráfica de la solución de la ecuación degenerada, luego de lo cual la curva integral $x=x(t,\mu)$ se aleja de ésta.

Obsérvese que si $\frac{\partial f}{\partial x}<0$ en la gráfica de la solución de la ecuación degenerada, entonces la solución $x=\varphi(t)$ es con toda seguridad

estable; si, en cambio, $\frac{\partial f}{\partial x} > 0$, entonces la solución es inestable. En efecto, en el primer caso, en un entorno de la curva $x = \varphi(t)$ la función f decrece al crecer x y, por lo tanto, cambia el signo de $+$ a $-$, y en el segundo, crece al aumentar x, por lo que al atravesar la gráfica de la solución $x = \varphi(t)$ la función f cambia su signo de $-$ a $+$.

Si la ecuación degenerada tiene varias soluciones $x = \varphi_i(t)$ entonces hay que investigar la estabilidad de cada una de ellas.

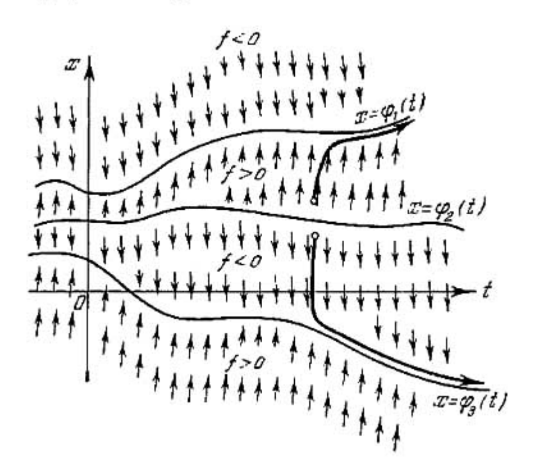


Fig. 4.21

Además, según la elección de las condiciones iniciales, las curvas integrales de la ecuación original pueden comportarse en formas diferentes cuando $\mu \to 0$. Por ejemplo, en el caso de las tres soluciones $x = \varphi_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) de la ecuación degenerada, representadas en la fig. 4.21, cuyas gráficas no se cortan, las soluciones $x = x(t, \mu)$, $\mu > 0$, de la ecuación original, determinadas por puntos iniciales que se encuentran por encima de la gráfica de la funcion $x = \varphi_2(t)$, tienden, para $t > t_0$ y $\mu \to 0$, hacia la solución estable $x = \varphi_1(t)$ de la ecuación degenerada. Las soluciones $x = x(t, \mu)$, determinadas por puntos iniciales que se encuentran debajo de la gráfica de la función $x = \varphi_2(t)$, tienden, para $t > t_0$ y $\mu \to 0$, a la solución estable $x = \varphi_3(t)$ de la ecuación degenerada (fig. 4.21).

Ejemplo 1. Determinar si la solución $x=x(t, \mu)$ de la ecuación $\mu \frac{dx}{dt}=x-t$, $\mu>0$, que satisface la condición inicial $x(t_0)=x_0$, tiende o no a la solución de la ecuación degenerada $x-t=0$, cuando $t>t_0$ y $\mu \longrightarrow 0$.

La solución $x=x(t, \mu)$ no tiende a la solución de la ecuación degenerada $x=t$, puesto que la solución de esta última es inestable, debido a que $\frac{\partial(x-t)}{\partial x}=1>0$ (fig. 4.22).

Ejemplo 2. La misma pregunta para la ecuación

$$\mu \frac{dx}{dt}=\operatorname{sen}^2 t-3e^x.$$

La solución de la ecuación degenerada $x=2\ln|\operatorname{sen} t|-\ln 3$ es estable, puesto que $\frac{\partial(\operatorname{sen}^2 t-3e^x)}{\partial x}=-3e^x<0$. Por consiguiente, la solución $x=x(t, \mu)$ de la ecuación inicial tiende a la solución de la ecuacion degenerada para $t>t_0$ cuando $\mu \longrightarrow 0$.

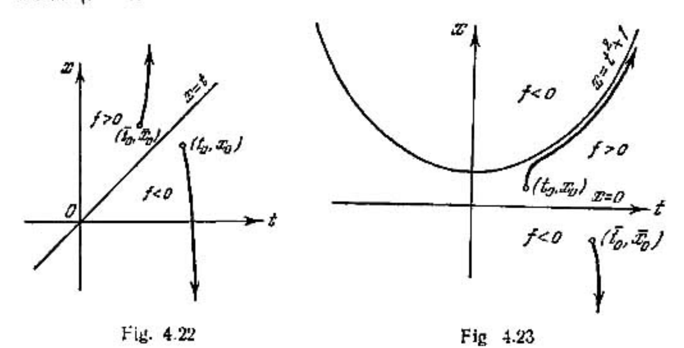


Fig. 4.22

Fig 4.23

Ejemplo 3. La misma pregunta para la solucion de la ecuacion

$$\mu \frac{dx}{dt}=x(t^2-x+1), \quad \mu>0, \quad x(t_0)=x_0.$$

De las dos soluciones $x=0$ y $x=t^2+1$ de la ecuación degenerada $x(t^2-x+1)=0$, la primera es inestable, debido a que $\left.\frac{\partial x(t^2-x+1)}{\partial x}\right|_{x=0}=t^2+1>0$, y la segunda, estable, puesto que $\left.\frac{\partial x(t^2-x+1)}{\partial x}\right|_{x=t^2+1}=-t^2-1<0$.

Si el punto inicial (t_0, x_0) se halla en el semiplano superior $x>0$, la curva integral de la ecuación original tiende, para $\mu \longrightarrow 0$, a la gráfica de la solución $x=t^2+1$ de la ecuación degenerada (fig. 4.23), y permanece en un entorno de ésta.

Si, en cambio, el punto inicial está en el semiplano inferior $x<0$, entonces $\lim\limits_{\mu \to 0} x(t, \mu)=-\infty$ para $t>t_0$ (fig. 4.23).

Para las ecuaciones de n-ésimo orden

$$\mu x^{(n)}(t) = f(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(n-1)})$$

y para los sistemas de ecuaciones diferenciales surge también el problema sobre la dependencia de la solución de un coeficiente μ pequeño en la derivada de orden mayor.

La ecuación de n-ésimo orden puede reducirse a un sistema de ecuaciones de primer orden por el método habitual (véase la pág. 88); por lo tanto, el problema fundamental consiste en el análisis de los sistemas de ecuaciones de primer orden con uno o varios coeficientes pequeños en las derivadas. Este problema ha sido estudiado detalladamente por A. N. Tíjonov y por A. B. Vasílieva.

§ 7. ESTABILIDAD BAJO PERTURBACIONES DE ACCION CONSTANTE

Si el sistema de ecuaciones estudiado

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad x_i(t_0) = x_{i0} \qquad (4.30)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

se somete a pequeñas perturbaciones de corta duración, entonces el sistema (4.30), en el pequeño intervalo de variación de t, $\bar{t}_0 \leqslant t \leqslant \bar{\bar{t}}_0$, debe ser sustituido por el sistema perturbado

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) + R_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ x_i(t_0) &= \bar{x}_i(\bar{t}_0) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \qquad (4.31)$$

donde todas las $R_i(t, x_1, x_2, \ldots x_n)$ son pequeñas en valor absoluto. Después, cuando $t \geqslant \bar{\bar{t}}_0$, las perturbaciones terminan, y se vuelve al sistema (4.30), pero ahora con los valores iniciales un tanto cambiados en el punto $\bar{\bar{t}}_0$, $x_i(\bar{\bar{t}}_0) = \bar{x}_i(\bar{\bar{t}}_0) + \delta_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, donde $\bar{x}_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ es la solución estudiada del sistema (4.30), y todas las δ_i son pequeñas en valor absoluto para pequeñas $|R_i|$, en virtud del teorema sobre la dependencia continua de la solución respecto al parámetro (fig. 4.24)

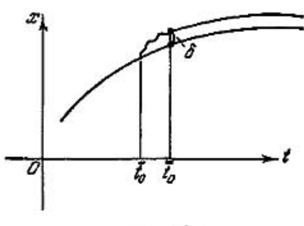


Fig. 4.24

Por consiguiente, la acción de perturbaciones de corta duración se reduce en última instancia a perturbaciones de las condiciones iniciales, y el problema de la estabilidad con respecto a dichas

perturbaciones de corta duración—o, como se llaman por lo general, instantáneas—se reduce al problema de la estabilidad según Liapunov, considerado más arriba.

Si, en cambio, las perturbaciones son de acción constante, el sistema (4.30) debe ser sustituido por el (4.31) para todas las $t \geqslant t_0$, y surge un problema completamente nuevo: el estudio de la estabilidad bajo perturbaciones de acción constante. Este problema fue estudiado por I. G. Malkin y por G. N. Duboshin.

Igual que al investigar la estabilidad según A. M. Liapunov se puede, por el cambio de variables $x_i = y_i - \varphi_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, transformar la solución estudiada $y_i = \varphi_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ del sistema $\frac{dy_i}{dt} = \Phi_i(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ en la solución trivial $x_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ del nuevo sistema. Por esto, en lo sucesivo se puede considerar que se investiga la estabilidad bajo perturbaciones de acción constante de la solución trivial $x_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ del sistema de ecuaciones (4.30).

La solución trivial del sistema (4.30) se llama *estable* con respecto a las perturbaciones de acción constante, si para todo $\varepsilon > 0$ existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que las desigualdades $\sum_{i=1}^{n} R_i^2 < \delta_1^2$ para $t \geqslant t_0$ y $\sum_{i=1}^{n} x_{i0}^2 < \delta_2^2$ implican que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t) < \varepsilon^2 \text{ cuando } t \geqslant t_0,$$

donde $x_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ es la solución del sistema (4.31), determinada por las condiciones iniciales $x_i(t_0) = x_{i0}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Teorema 4.7 (teorema de Malkin). *Si para el sistema de ecuaciones* (4.30) *existe una función derivable de Liapunov* $v(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *que satisfaga en un entorno del origen de coordenadas, para* $t \geqslant t_0$ *las condiciones siguientes:*

1) $v(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant w_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant 0$, $v(t, 0, 0, \ldots, 0) = 0$, *donde* w_1 *es una función continua que se anula sólo en el origen de coordenadas;*

2) *las derivadas* $\frac{\partial v}{\partial x_s}$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$ *están acotadas en valor absoluto;*

3) *la derivada* $\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i \leqslant -w_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant 0$, *donde la función continua* $w_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *se puede anular sólo en el origen de coordenadas, entonces la solución trivial del sistema* (4.30) *es estable con respecto a las perturbaciones de acción constante.*

Demostración. Obsérvese que, en virtud de que las derivadas $\frac{\partial v}{\partial x_s}$ $(s=1, 2, \ldots, n)$ están acotadas, la función v tiende a cero cuando $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \to 0$ uniformemente con respecto a t para $t \geqslant t_0$, ya que por el teorema del valor medio, $v(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) x_i$, donde $\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)$ son las derivadas calculadas para ciertos valores intermedios, entre 0 y x_i $(i=1, 2, \ldots, n)$, de los argumentos $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Obsérvese también que, fuera de cierto δ—entorno del origen $\left(\text{o sea, cuando } \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant \delta^2 > 0\right)$ y para $t \geqslant t_0$, en virtud de las condiciones 2) y 3), la derivada

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\partial v}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i} f_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i} R_i \leqslant -k < 0$$

para R_i suficientemente pequeñas en valor absoluto $(i=1, 2, \ldots, n)$.

Fijemos un $\varepsilon > 0$ y tomemos cierta superficie de nivel (o una de sus componentes) $w_1 = l$, $l > 0$, contenida íntegramente en el ε—entorno del origen de coordenadas.

La superficie de nivel $v(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = l$, que cambia al variar $t \geqslant t_0$, se halla, debido a la condición 1), dentro de la superficie de nivel $w_1 = l$ y al mismo tiempo, como la función v tiende a cero para $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \to 0$ uniformemente respecto a t, se encuentra fuera de cierto δ_2—entorno del origen de coordenadas, en el cual $v < l$. Por consiguiente, en la superficie de nivel $v(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = l$ para cualquier $t \geqslant t_0$ la derivada

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\partial v}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i} f_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i} R_i \leqslant -k < 0,$$

si $\sum_{i=1}^{n} R_i^2 < \delta_1$, $\delta_1 > 0$, donde δ_1 es suficientemente pequeño. La trayectoria determinada por un punto inicial $x_i(t_0) = x_{i0}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ que esté en el δ_2—entorno considerado del origen, no puede salir de los límites del ε—entorno de dicho punto, para $t \geqslant t_0$. En efecto, debido a la elección de δ_2, es $v(t_0, x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}) < l$ y, por lo tanto, si para $t \geqslant t_0$ la trayectoria saliera del ε—entorno o aunque sea de los límites de la superficie de nivel $w_1 = l$, entonces ésta debería cortar por primera vez la superficie de nivel

$v(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = l$ para cierto valor $t = T$, y en un entorno del punto de intersección, a lo largo de la trayectoria, la función v debería crecer, y obtendríamos una contradicción con respecto a la condición $\frac{dv}{dt} \leqslant -k < 0$ a lo largo de la trayectoria en los puntos de la superficie de nivel $v(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = l$.

Comparando las condiciones del teorema de Malkin con las del teorema de Liapunov sobre la estabilidad asintótica (véase la observación de la pág. 223), vemos que éstas casi coinciden. En el teorema de Malkin se tiene solamente la condición complementaria de acotación de las derivadas $\frac{\partial v}{\partial x_s}$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$; en consecuencia, la estabilidad asintótica y la estabilidad con respecto a las perturbaciones de acción constante son propiedades si no coincidentes, al menos muy cercanas.

Ejemplo 1. ¿Es estable con respecto a las perturbaciones de acción constante la solución trivial $x = 0$, $y = 0$ del sistema de ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = -a^2y - x^3,$$
$$\frac{dy}{dt} = -b^2x - y^3,$$

donde a y b son constantes?

Una función de Liapunov que satisface todas las condiciones del teorema de Malkin es $v = b^2x^2 + a^2y^2$.

Por lo tanto, el punto de reposo $x = 0$, $y = 0$ es estable con respecto a las perturbaciones de acción constante.

Ejemplo 2. Analizar si es estable o no el punto de reposo $x_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ del sistema

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + R_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.32}$$

con respecto a las perturbaciones de acción constante, si todas las a_{ij} son constantes, y la R_i satisfacen las condiciones del teorema de Liapunov, pág. 227 es decir,

$$|R_i| \leqslant N\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}+\alpha}, \quad \alpha > 0,$$ N es una constante, y todas las raíces de la ecuación característica del sistema de primera aproximación son diferentes y negativas.

En la pág. 228, después del cambio de variables que reduce la parte lineal de la ecuación (4.32) a la forma canónica, fue indicada la función de Liapunov $v = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$ que satisface todas las condiciones del teorema de Malkin. Por consiguiente, el punto de reposo $x_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ es estable con respecto a las perturbaciones de acción constante.

El mismo resultado se puede obtener si se considera que las partes reales de todas las raíces de la ecuación característica, entre las cuales puede haber múltiples, son negativas, sólo que en este caso la elección de la función de Liapunov se complica mucho.

EJERCICIOS DEL CAPITULO 4

1. Analizar la estabilidad del punto de reposo $x=0$, $y=0$, del sistema

$$\frac{dx}{dt}=-2x-3y+x^5,$$
$$\frac{dy}{dt}=x+y-y^3.$$

2. Analizar la estabilidad del punto de reposo $x=0$, $y=0$, $z=0$ del sistema

$$\frac{dx}{dt}=x-y-z, \quad \frac{dy}{dt}=x+y-3z, \quad \frac{dz}{dt}=x-5y-3z.$$

3. ¿Para qué valores de α el punto de reposo $x=0$, $y=0$, $z=0$ del sistema $\frac{dx}{dt}=\alpha x-y$, $\frac{dy}{dt}=\alpha y-z$, $\frac{dz}{dt}=\alpha z-x$ es estable?

4. ¿Para qué valores de α el sistema

$$\frac{dx}{dt}=y+\alpha x-x^5,$$
$$\frac{dy}{dt}=-x-y^5$$

tiene punto de reposo $x=0$, $y=0$ estable?

5. ¿A qué límite tiende la solución de la ecuación diferencial

$$\mu\frac{dx}{dt}=(x^2+t^2-4)(x^2+t^2-9), \quad x(1)=1$$

cuando $\mu\to 0$, $\mu>0$, $t>1$?

6. ¿A qué límite tiende la solución de la ecuación diferencial

$$\mu\frac{dx}{dt}=x-t+5, \quad x(2)=5, \text{ cuando } \mu\to 0, \ \mu>0, \ t>2?$$

7. Analizar la estabilidad del punto de reposo $x=0$, $y=0$ del sistema de ecuaciones

$$\frac{dx}{dt}=x+e^y-\cos y,$$
$$\frac{dy}{dt}=3x-y-\operatorname{sen} y.$$

8. ¿Es estable con respecto a las perturbaciones de acción constante la solución $x=0$, $y=0$ del sistema de ecuaciones

$$\frac{dx}{dt}=-2y-x^5,$$
$$\frac{dy}{dt}=5x-y^5?$$

9. ¿Es estable la solución $x=0$ de la ecuación

$$x+5\ddot{x}+2\dot{x}+20x=0?$$

10. ¿Es estable la solución $x=0$ de la ecuación

$$\dddot{x}+5\ddot{x}+6\dot{x}+x=0?$$

11. ¿Que clase de punto de reposo $x=0$, $y=0$ tiene el sistema de ecuaciones

$$\frac{dx}{dt}=x+3y,\quad \frac{dy}{dt}=5x-y?$$

12. Determinar la solución periódica de la ecuación $\ddot{x}+2\dot{x}+2x=\operatorname{sen} t$ e investigar su estabilidad.

13. $\dddot{x}+2\ddot{x}+5\dot{x}+3x=\cos t$ ¿Es estable la solución periódica de esta ecuación?

14. Analizar la estabilidad del punto de reposo $x=0$, $y=0$ del sistema de ecuaciones

$$\dot{x}=y^3+x^5,\quad \dot{y}=x^3+y^5.$$

15. Analizar la estabilidad de las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\dot{x}=3y-2x+e^t,$$
$$\dot{y}=5y-4y+2.$$

16. Investigar la estabilidad de la solución trivial de la ecuación

$$\ddddot{x}+2\dddot{x}+3\dot{x}+7\operatorname{sh} x=0.$$

17. Analizar la estabilidad de la solución trivial de la ecuación

$$\dddot{x}+(\alpha-1)\dot{x}+(4-\alpha^2)x=0,$$

donde α es un parámetro.

18. Determinar si es estable o no la solución $x=0$, $y=0$ del sistema

$$\dot{x}=3y-x^3,\quad \dot{y}=-4x-3y^5$$

bajo perturbaciones de acción constante.

19. Determinar si es estable o no la solución trivial del sistema

$$X(t)=AX(t),$$

donde $X(t)$ es un vector del espacio tridimensional, y

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

20. Investigar la estabilidad de las soluciones de la ecuación

$$\dddot{x}+4\ddot{x}+5\dot{x}=t.$$

21. Analizar la estabilidad de las soluciones de la ecuación

$$\ddot{x}+9x=\operatorname{sen} t.$$

22. $x+x=\cos t$. Hallar la solución periódica e investigar su estabilidad.

23. Hallar la región de estabilidad de

$$x+\alpha\dot{x}+(1-\alpha)x=0.$$

24. $\ddot{x}+\dddot{x}+\alpha^2\dot{x}+5\alpha x=0$. Hallar la región de estabilidad.

CAPITULO 5

Ecuaciones en derivadas parciales de primer orden

1. CONCEPTOS GENERALES

Como ya fue señalado en la introducción (pág. 12), se llaman *ecuaciones diferenciales en derivadas parciales* a aquéllas en las que las funciones desconocidas son funciones de más de una variable independiente.

Muchos fenómenos físicos se describen mediante ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. La ecuación

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=n(x, y, z)$$

describe la propagación de los rayos luminosos en un medio no homogéneo con índice de refracción $n(x, y, z)$; la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

describe la variación de la temperatura de una barra; la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

es la ecuación de las oscilaciones de una cuerda; a la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

la satisface el potencial del campo en las regiones que no contienen cargas, etc.

En este capítulo estudiaremos brevemente sólo los métodos de integración de las ecuaciones en derivadas parciales de primer orden, cuya teoría está estrechamente ligada a la integración de ciertos sistemas de ecuaciones ordinarias.

Las ecuaciones en derivadas parciales de orden mayor, que se integran por métodos completamente distintos, son tratadas en otro libro de esta serie.

Consideremos algunos ejemplos sencillos.

Ejemplo 1.

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = y + x.$$

Integrando respecto a x, obtenemos

$$z(x, y) = xy + \frac{x^2}{2} + \varphi(y),$$

donde $\varphi(y)$ es una función arbitraria de y.

Ejemplo 2.

$$\frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x \partial y} = 0, \text{ o bien } \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial z}{\partial y}\right\} = 0.$$

Integrando respecto a x, obtenemos $\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi(y)$, donde $\varphi(y)$ es una función arbitraria de y. Integrando ahora respecto a y, se obtiene

$$z = \int \varphi(y)\,dy + \varphi_1(x),$$

donde $\varphi_1(x)$ es una función arbitraria de x. O bien, designando

$$\int \varphi(y)\,dy = \varphi_2(y),$$

tendremos finalmente

$$z(x, y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y),$$

donde $\varphi_2(y)$, en virtud de la arbitrariedad de $\varphi(y)$, es también una función arbitraria derivable de y.

Los ejemplos expuestos nos sugieren que la solución general de una ecuación diferencial en derivadas parciales de primer orden depende de una función arbitraria; la solución general de una ecuación de segundo orden, de dos funciones arbitrarias, y la solución general de una ecuación de p-ésimo orden, probablemente dependerá de p funciones arbitrarias

Estas consideraciones son ciertas, pero deben ser precisadas. Para ello, formulemos el teorema de S. V. Kovalévskaia sobre la existencia y unicidad de la solución de una ecuación en derivadas parciales.

Teorema 5.1 (teorema de Kovalévskaia). *Existe una solución analítica única en un entorno del punto* $x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}$ *de la ecuación*

$$\frac{\partial^p z}{\partial x_1^p} = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \ldots \right.$$
$$\left. \ldots, \frac{\partial^{p-1} z}{\partial x_1^{p-1}}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}, \ldots, \frac{\partial^p z}{\partial x_n^p}\right), \qquad \text{(A)}$$

resuelta con respecto a una de sus derivadas de orden mayor, que

satisface las condiciones:

$$\text{para } x = x_{10}, \text{ es } z = \varphi_0(x_2, x_3, \ldots, x_n),$$
$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \varphi_1(x_2, x_3, \ldots, x_n), \ldots, \frac{\partial^{p-1} z}{\partial x_1^{p-1}} = \varphi_{p-1}(x_2, x_3, \ldots, x_n),$$

si las funciones $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{p-1}$ *son analíticas en un entorno del punto inicial* $x_{20}, x_{30}, \ldots, x_{n0}$, *y* f *es función analítica en un entorno de los valores iniciales de sus argumentos,* $x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}$, $z_0 = \varphi_0(x_{20}, x_{30}, \ldots, x_{n0})$,

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)_0 = \varphi_1(x_{20}, \ldots, x_{n0}), \ldots, \left(\frac{\partial^p z}{\partial x_n^p}\right)_0 = \left(\frac{\partial^p \varphi_0}{\partial x_n^p}\right)_{x_i = x_{i_0}}.$$

La solución se determina fijando las funciones iniciales φ_0, $\varphi_1, \ldots, \varphi_{p-1}$. Al variar dichas funciones arbitrariamente en la clase de las funciones analíticas, obtenemos un conjunto de soluciones analíticas de la ecuación original (A), que depende de p funciones arbitrarias.

Omitimos la demostración de este teorema, que exige la aplicación de la teoría de las funciones analíticas.

§ 2. ECUACIONES LINEALES Y CUASILINEALES EN DERIVADAS PARCIALES DE PRIMER ORDEN

Se denomina *ecuación lineal no homogénea o ecuación cuasilineal de primer orden en derivadas parciales*, a la ecuación de la forma

$$X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots$$
$$\ldots + X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_n} = Z(x_1, x_2, \ldots, x_n, z). \qquad (5.1)$$

Esta ecuación es lineal con respecto a las derivadas, pero puede ser no lineal con respecto a la función desconocida z.

Si el segundo miembro es idénticamente nulo y los coeficientes X_i no dependen de z, la ecuación (5.1) se llama *lineal homogénea.*

Para mayor claridad en la interpretación geométrica, estudiemos primero la ecuación cuasilineal con dos variables independientes:

$$P(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z). \qquad (5.1_1)$$

Se considerará que las funciones P, Q y R son continuas en la región considerada de variación de las variables, y que no se anulan simultáneamente.

Consideremos el campo vectorial continuo

$$\mathbf{F} = P(x, y, z)\,\mathbf{i} + Q(x, y, z)\,\mathbf{j} + R(x, y, z)\,\mathbf{k},$$

donde **i**, **j** y **k** son vectores unitarios dirigidos por los ejes de coordenadas.

Las líneas vectoriales de este campo (es decir, las líneas cuyas tangentes tienen en cada punto una dirección que coincide con la del vector **F** en dicho punto) se determinan de la condición de paralelismo entre el vector $\mathbf{t} = \mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz$, dirigido por la tangente a las líneas buscadas, y el vector **F** del campo:

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}.$$

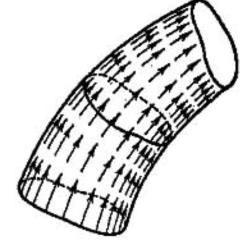


Fig. 5.1

Las superficies formadas por líneas vectoriales o, más exactamente, las superficies que contienen enteramente a las líneas vectoriales que tengan al menos un punto común con ésta, se llaman *superficies vectoriales* (fig. 5.1).

Es evidente que las superficies vectoriales se pueden obtener considerando el conjunto de puntos que pertenecen a una familia monoparamétrica de líneas vectoriales escogida arbitrariamente, que depende en forma continua del parámetro. La superficie vectorial se caracteriza por que el vector **N** que tiene la dirección de la normal a la superficie, es ortogonal al vector **F** del campo en todo punto de ésta:

$$(\mathbf{N} \cdot \mathbf{F}) = 0. \tag{5.2}$$

Si la superficie vectorial se determina por la ecuación $z = f(x, y)$, entonces el vector **N** es igual a

$$\mathbf{N} = \frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} - \mathbf{k},$$

y la condición (5.2) toma la forma

$$P(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z). \tag{5.3}$$

Si la superficie vectorial se da mediante la ecuación $u(x, y, z) = 0$ y, por consiguiente, el vector $\mathbf{N} = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}$, entonces la ecuación (5.2) toma la forma

$$P(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial y} + R(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0. \tag{5.4}$$

Por consiguiente, para hallar las superficies vectoriales hay que integrar la ecuación cuasilineal (5.3), o la ecuación lineal homo-

génea (5.4), según se busque la ecuación de las superficies vectoriales en forma explícita o implícita.

Como las superficies vectoriales pueden formarse por *líneas vectoriales*, la integración de la ecuación (5.3) (ó (5.4)) se reduce a la integración del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de las líneas vectoriales.

Escribamos el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de las líneas vectoriales:

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}. \tag{5.5}$$

Sean $\psi_1(x, y, z) = c_1$ y $\psi_2(x, y, z) = c_2$ dos primeras integrales independientes del sistema (5.5). Tomemos arbitrariamente de la familia dependiente de dos parámetros de líneas vectoriales $\psi_1(x, y, z) = c_1$, $\psi_2(x, y, z) = c_2$, llamadas *características* de la ecuación (5.3) (ó (5.4)), una familia monoparamétrica, estableciendo una dependencia continua cualquiera $\Phi(c_1, c_2) = 0$ entre los parámetros c_1 y c_2. Eliminando los parámetros c_1 y c_2 del sistema

$$\psi_1(x, y, z) = c_1, \quad \psi_2(x, y, z) = c_2, \quad \Phi(c_1, c_2) = 0,$$

obtenemos la ecuación buscada de las superficies vectoriales:

$$\Phi(\psi_1(x, y, z), \ \psi_2(x, y, z)) = 0, \tag{5.6}$$

donde Φ es una función arbitraria. Con esto hemos hallado la ecuación cuasilineal (5.3) que depende de una función arbitraria.

Si se exige hallar no una superficie vectorial arbitraria del campo

$$\mathbf{F} = P(x, y, z)\,\mathbf{i} + Q(x, y, z)\,\mathbf{j} + R(x, y, z)\,\mathbf{k},$$

sino la superficie que pasa por una línea dada, determinada por las ecuaciones $\Phi_1(x, y, z) = 0$ y $\Phi_2(x, y, z) = 0$, entonces la función Φ en (5.6) ya no será arbitraria, sino que se determinará eliminando las variables x, y y z del sistema de ecuaciones

$$\Phi_1(x, y, z) = 0, \quad \Phi_2(x, y, z) = 0,$$
$$\psi_1(x, y, z) = c_1, \quad \psi_2(x, y, z) = c_2,$$

las que deben satisfacerse simultáneamente en los puntos de la línea dada $\Phi_1 = 0$ y $\Phi_2 = 0$, por la cual se trazan las características, determinadas mediante las ecuaciones $\psi_1(x, y, z) = c_1$, $\psi_2(x, y, z) = c_2$.

Obsérvese que el problema queda indeterminado si la línea dada $\Phi_1(x, y, z) = 0$, $\Phi_2(x, y, z) = 0$ es característica, ya que en este caso esta línea se puede incluir en diferentes familias monoparamétricas de características, obteniendo así diferentes curvas integrales que pasan por dicha línea.

De este modo, la integral de la ecuación cuasilineal

$$P(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z)$$

dependiente de una función arbitraria, puede obtenerse por el método siguiente: se integra el sistema auxiliar de ecuaciones

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}$$

y, hallando dos primeras integrales independientes de éste:

$$\psi_1(x, y, z) = c_1, \quad \psi_2(x, y, z) = c_2,$$

se obtiene la integral buscada en la forma $\Phi(\psi_1(x, y, z), \psi_2(x, y, z)) = 0$, donde Φ es una función arbitraria.

La ecuación de la superficie integral de la misma ecuación cuasilineal que pasa por una línea dada, determinada por las ecuaciones $\Phi_1(x, y, z) = 0$ y $\Phi_2(x, y, z) = 0$, se puede hallar tomando la función Φ mencionada más arriba no en forma arbitraria, sino determinando $\Phi(c_1, c_2)$ por eliminación de x, y y z de las ecuaciones

$$\Phi_1(x, y, z) = 0, \quad \Phi_2(x, y, z) = 0,$$
$$\psi_1(x, y, z) = c_1, \quad \psi_2(x, y, z) = c_2,$$

a resultas de lo cual se obtiene la ecuación $\Phi(c_1, c_2) = 0$, y la integral buscada será $\Phi(\psi_1(x, y, z), \psi_2(x, y, z)) = 0$.

Ejemplo 1. Determinar la integral de la ecuación

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

que depende de una función arbitraria.

El sistema auxiliar de ecuaciones es

$$dx = dy = dz.$$

Sus primeras integrales tienen la forma $x - y = c_1$, $z - x = c_2$. La integral de la ecuación original es $\Phi(x - y, z - x) = 0$, donde Φ es una función arbitraria, o en forma resuelta con respecto a z, $z = x + \varphi(x - y)$, donde φ es una función derivable arbitraria.

Ejemplo 2. Hallar la superficie integral de la ecuación

$$x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

que pasa por la curva $x = 0$, $z = y^2$.

Integremos el sistema de ecuaciones

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0},$$

de donde $z = c_1$, $x^2 + y^2 = c_2$. Eliminando x, y y z de las ecuaciones

$$x^2 + y^2 = c_2, \quad z = c_1, \quad x = 0, \quad z = y^2,$$

obtenemos $c_1 = c_2$, de donde $z = x^2 + y^2$

Ejemplo 3. Hallar la superficie integral de la misma ecuación

$$x\frac{\partial z}{\partial y}-y\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

que pasa por la circunferencia

$$z=1, \quad x^2+y^2=4. \tag{5.7}$$

Puesto que la línea dada (5.7) es vectorial (característica), el problema es indeterminado. En efecto, cualquier superficie de revolución $z=\Phi(x^2+y^2)$, cuyo eje de rotación coincida con el eje Oz, es superficie integral de la ecuación considerada. Evidentemente, existe un conjunto infinito de tales superficies, que pasan por la circunferencia (5.7), por ejemplo, los paraboloides de revolución $z=x^2+y^2-3$, $4z=x^2+y^2$, $z=-x^2-y^2+5$, la esfera $x^2+y^2+z^2=5$, etc.

Si la ecuación de la curva por la cual se exige trazar la superficie integral de la ecuación (5.1_1) se da en forma paramétrica:

$$x_0=x_0(s), \quad y_0=y_0(s), \quad z_0=z_0(s), \tag{B}$$

entonces es también conveniente buscar la solución en forma paramétrica:

$$x=x(t, s), \quad y=y(t, s), \quad z=z(t, s).$$

Introduzcamos un parámetro t en el sistema (5.5) que determina las características, haciendo

$$\frac{dx}{P(x, y, z)}=\frac{dy}{Q(x, y, z)}=\frac{dz}{R(x, y, z)}=dt. \tag{5,5₁}$$

Para que las características pasen por la curva dada, se busca la solución del sistema (5.5_1) que satisface, para $t=0$ (ó $t=t_0$), las condiciones iniciales:

$$x=x_0(s), \quad y=y_0(s), \quad z=z_0(s).$$

Para estas condiciones iniciales y para s fija, obtenemos una característica que pasa por un punto fijo de la curva (B). Cuando s es variable, obtenemos la familia de características

$$x=x(t, s), \quad y=y(t, s), \quad z=z(t, s), \tag{C}$$

que pasan por los puntos de la curva dada (B) (en este caso se considera que la curva dada (B) no es característica). El conjunto de puntos que pertenecen a esta familia de características (C) forma precisamente la curva integral buscada.

Ejemplo 4.

$$\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=1.$$

Hallar la superficie integral que pasa por la curva $x_0=s$, $y_0=s^2$, $z_0=s^3$.

El sistema de ecuaciones que determina las características tiene la forma

$$dx=-dy=dz=dt.$$

Su solución general es

$$x=t+c_1, \quad y=-t+c_2, \quad z=t+c_3.$$

Las constantes arbitrarias se determinan mediante las condiciones iniciales, y obtenemos por último

$$x=t+s, \quad y=-t+s^2, \quad z=t+s^3.$$

Pasemos ahora al caso de n variables independientes. Es natural esperar que el esquema indicado más arriba para el caso tridimensional se pueda generalizar también al caso $(n+1)$-dimensional.

Comencemos analizando la ecuación lineal homogénea

$$X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots$$
$$\ldots + X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial z}{\partial x_n} = 0, \qquad (5.8)$$

donde las funciones continuas $X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ no se anulan simultáneamente en ningún punto de la región considerada y tienen derivadas parciales acotadas en dicha región.

Formemos el sistema de ecuaciones auxiliar

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \ldots x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}, \qquad (5.9)$$

el cual satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad bajo las limitaciones indicadas más arriba.

Hallemos $n-1$ primeras integrales independientes del sistema (5.9):

$$\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1,$$
$$\psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\psi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_{n-1}.$$

En el espacio con coordenadas $x_1, x_2, \ldots, x_n$, este sistema de integrales determina una familia de líneas, dependiente de $n-1$ parámetros, llamadas *características* de la ecuación (5.8). Demostremos que el primer miembro de cualquier primera integral $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c$ del sistema (5.9) es solución de la ecuación lineal homogénea inicial en derivadas parciales (5.8).

En efecto, a lo largo de cualquier curva integral del sistema (5.9) la función ψ es $\psi \equiv c$. Por lo tanto, a lo largo de cualquier curva integral se tiene

$$d\psi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx_i \equiv 0. \qquad (5.10)$$

Pero a lo largo de una curva integral del sistema (5.9) las diferenciales dx_i son proporcionales a las funciones X_i. En consecuencia, en virtud de la homogeneidad con respecto a dx_i del primer miembro de la identidad

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx_i \equiv 0,$$

las diferenciales dx_i pueden ser sustituidas por las magnitudes X_i, proporcionales a éstas, resultando así que a lo largo de las curvas integrales del sistema (5.9)

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} X_i \equiv 0. \qquad (5.11)$$

Las curvas integrales del sistema (5.9) pasan por cada punto del campo de variación considerado de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$; por otro lado, el primer miembro de la identidad (5.11) no depende de las constantes $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ y, por lo tanto, no cambia al pasar de una curva integral a otra. Por consiguiente, la indentidad (5.11) se cumple no sólo a lo largo de una curva integral, sino en toda la región considerada de variación de $x_1, x_2, \ldots, x_n$; esto significa precisamente que la función ψ es solución de la ecuación original

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0.$$

Es evidente que $\Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}) = c$, donde Φ es una función arbitraria, es primera integral del sistema (5.9), puesto que a lo largo de una curva integral del sistema (5.9) todas las funciones $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$ se transforman en constantes; por lo tanto, $\Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})$ también se transformará en una constante a lo largo de una curva integral del sistema (5.9). Esto significa que $z = \Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})$, donde Φ es una función derivable arbitraria, es solución de la ecuación lineal homogénea (5.8).

Demostremos que

$$z = \Phi(\psi_1(x_1, \ldots, x_n), \psi_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots \psi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n))$$

es solución general de la ecuación (5.8).

Teorema 5.2. *$z = \Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})$, donde Φ es una función arbitraria, es solución general de la ecuación*

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0, \tag{5.8}$$

o sea, una solución que contiene sin excepción a todas las soluciones de esta ecuación.

D e m o s t r a c i ó n. Supongamos que $z = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es cierta solución de la ecuación (5.8), y demostremos que existe una función Φ tal que $\psi = \Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})$.

Como ψ y $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$ son soluciones de la ecuación (5.8), entonces

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = 0, \\ &\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} = 0, \\ &\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial \psi_2}{\partial x_i} = 0, \\ &\quad \cdots\cdots\cdots \\ &\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_i} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.12}$$

Considerando a (5.12) como un sistema lineal homogéneo de n ecuaciones con respecto a X_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ y observando que este sistema lineal tiene solución no trivial en cada punto $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de la región considerada, debido a que $X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ por hipótesis no se anulan simultáneamente, llegamos a la conclusión de que el determinante de este sistema

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\psi}{\partial x_n} \\ \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\psi_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

es idénticamente nulo en la región considerada. Pero el hecho de que el jacobiano de las funciones $\psi, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$ sea idénticamente nulo, indica que existe una dependencia funcional entre estas funciones:

$$F(\psi, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}) = 0. \tag{5.13}$$

En virtud de la independencia de las primeras integrales $\psi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)=c_i$ $(i=1, 2, \ldots, n-1)$ del sistema (5.9), por lo menos uno de los menores de $(n-1)$-ésimo orden del jacobiano

$$\frac{D(\psi, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})}{D(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)}$$

de la forma

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})}{D(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_{n-1}})}$$

es diferente de cero. Por lo tanto, la ecuación (5.13) se puede escribir en la forma

$$\psi = \Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}).$$

Ejemplo 5. Integrar la ecuación

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0. \tag{5.14}$$

El sistema de ecuaciones que determina las características tiene la forma

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \ldots = \frac{dx_n}{x_n}.$$

Las primeras integrales independientes de este sistema serán:

$$\frac{x_1}{x_n} = c_1, \quad \frac{x_2}{x_n} = c_2, \quad \ldots, \quad \frac{x_{n-1}}{x_n} = c_{n-1}.$$

La solución general de la ecuación original

$$z=\Phi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right)$$

es una función homogénea arbitraria con grado nulo de homogeneidad.

El teorema de Euler sobre las funciones homogéneas afirma que las funciones homogéneas con grado nulo de homogeneidad satisfacen la ecuación considerada (5.14); ahora hemos demostrado que sólo las funciones homogéneas con grado nulo de homogeneidad poseen esta propiedad.

La ecuación lineal no homogénea de primer orden

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_i}=Z(x_1, x_2, \ldots, x_n, z), \qquad (5.15)$$

donde todas las X_i y Z son funciones con derivadas continuas que no se anulan simultáneamente en la región considerada de variación de $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$ se integran por reducción a una ecuación lineal homogénea.

Con este fin, al igual que en el caso de tres variables, es suficiente buscar la solución z de la ecuación (5.15) en forma implícita:

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)=0, \qquad (5.16)$$

donde $\frac{\partial u}{\partial z}\neq 0$.

En efecto, considerando que la función $z=z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se determina de la ecuación (5.16) y derivando la identidad

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n, z(x_1, x_2, \ldots, x_n))\equiv 0$$

con respecto a x_i, se obtiene

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_i}=0$$

de donde

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}=-\frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{\frac{\partial u}{\partial z}}.$$

Sustituyendo el valor hallado de $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ en (5.15), multiplicando por $-\frac{\partial u}{\partial z}$ y trasladando todos los términos al primer miembro de la ecuación, obtenemos la ecuación lineal homogénea

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)\frac{\partial u}{\partial x_i}+Z(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)\frac{\partial u}{\partial z}=0, \qquad (5.17)$$

a la cual debe satisfacer la función u, sin embargo, sólo bajo la

suposición de que z es función de $x_1, x_2, \dots, x_n$, determinada por la ecuación $u(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0$.

De esta manera, hay que hallar las funciones u que transformen la ecuación lineal homogénea (5.17) en una identidad, debido a la ecuación

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0.$$

Hallemos primero las funciones u que transformen (5.17) en una identidad cuando las $x_1, x_2, \dots, x_n, z$ varíen en forma independiente. Todas estas funciones u son soluciones de la ecuación homogénea (5.17) y pueden ser halladas por el método ya conocido: se escribe el sistema de ecuaciones que determina las características

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \dots, x_n, z)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \dots, x_n, z)} = \dots$$
$$\dots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, \dots, x_n, z)} = \frac{dz}{Z(x_1, x_2, \dots, x_n, z)}; \qquad (5.18)$$

se hallan n primeras integrales independientes de este sistema:

$$\psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = c_1,$$
$$\psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = c_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\psi_n(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = c_n;$$

entonces la solución general de la ecuación (5.17) tiene la forma

$$u = \Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$$

donde Φ es una función arbitraria.

La solución z de la ecuación (5.15), dependiente de una función arbitraria, se determina de la ecuación

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0, \text{ o bien } \Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) = 0.$$

Pero, aparte de las funciones halladas por este método, pueden haber soluciones z que se determinen de la ecuación $u(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0$, donde la función u no es solución de la ecuación (5.17), y la transforma en una identidad sólo debido a la ecuación $u(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0$. Estas soluciones se denominan *especiales*.

En cierto sentido las soluciones especiales no son muchas; éstas no pueden formar incluso familias monoparamétricas.

En efecto, si las soluciones especiales formaran una familia monoparamétrica, y se determinaran por la ecuación

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = c, \qquad (5.19)$$

siendo c un parámetro, $c_0 \leqslant c \leqslant c_1$, la ecuación (5.17) debería transformarse en una identidad debido a la ecuación (5.19) para cualquier c. Pero como la ecuación (5.17) no contiene c, no puede convertirse en identidad debido a la ecuación (5.19), que contiene c, y por lo tanto debe ser una identidad con respecto a todas las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$, que varían en forma independiente.

La última afirmación posee una interpretación geométrica simple. Al decir que (5.17) se reduce a una identidad debido a la ecuación $u(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)=0$, afirmamos que dicha reducción se realiza en los puntos de la superficie $u=0$, pero puede no reducirse a una identidad en otros puntos del espacio $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$. Si, en cambio, la ecuación (5.17), que no contiene c, se transforma en una identidad debido a la ecuación $u=c$, siendo c un parámetro que varía en forma continua, entonces esto significa que (5.17) se reduce a una identidad en todas las superficies $u=c$, $c_0 \leqslant c \leqslant c_1$, que no se cortan y que llenan cierta parte D del espacio $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$. Por consiguiente, la ecuación (5.17) se transforma en una identidad en la región D cuando las $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$ varían en forma independiente.

En problemas concretos generalmente se exige buscar la solución de la ecuación (5.15) que satisface además ciertas condiciones iniciales y, como hay relativamente pocas soluciones especiales en el sentido señalado más arriba, sólo en casos completamente excepcionales éstas satisfarán las condiciones iniciales impuestas, y por ello sólo raramente hay que tomarlas en cuenta.

E j e m p l o 6. Integrar la ecuación

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = pz, \tag{5.20}$$

donde p es una constante.

El sistema de ecuaciones

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \ldots = \frac{dx_n}{x_n} = \frac{dz}{pz}$$

tiene las siguientes integrales independientes:

$$\frac{x_1}{x_n} = c_1, \quad \frac{x_2}{x_n} = c_2, \quad \ldots, \quad \frac{x_{n-1}}{x_n} = c_{n-1}, \quad \frac{z}{x_n^p} = c_n.$$

Por consiguiente, la solución z de la ecuación inicial se determina por la ecuación

$$\Phi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, \frac{z}{x_n^p}\right) = 0,$$

de donde

$$z = x_n^p \psi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right).$$

De este modo, la solución es una función homogénea arbitraria de p—ésimo grado de homogeneidad.

Se puede demostrar que la ecuación (5.20) no tiene integrales especiales y que, por lo tanto, el teorema de Euler sobre las funciones homogéneas es reversible: a la ecuación (5.20) la satisfacen sólo funciones homogéneas con grado p de homogeneidad.

El concepto de característica se generaliza a los sistemas de ecuaciones cuasilineales del siguiente tipo especial:

$$\begin{aligned} P(x, y, u, v)\frac{\partial u}{\partial x}+Q(x, y, u, v)\frac{\partial u}{\partial y}&=R_1(x, y, u, v),\\ P(x, y, u, v)\frac{\partial v}{\partial x}+Q(x, y, u, v)\frac{\partial v}{\partial y}&=R_2(x, y, u, v). \end{aligned} \qquad \text{(D)}$$

Se denominan *características* de este sistema a las líneas vectoriales del campo vectorial en el espacio de cuatro dimensiones

$$\mathbf{F}=P(x, y, u, v)\,\mathbf{i}+Q(x, y, u, v)\,\mathbf{j}+R_1(x, y, u, v)\,\mathbf{k}_1+R_2(x, y, u, v)\,\mathbf{k}_2,$$

donde $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}_1$ y $\mathbf{k}_2$ son vectores unitarios dirigidos respectivamente por los ejes de coordenadas Ox, Oy, Ou y Ov.

Las características se determinan por el sistema de ecuaciones

$$\frac{dx}{P(x, y, u, v)}=\frac{dy}{Q(x, y, u, v)}=\frac{du}{R_1(x, y, u, v)}=\frac{dv}{R_2(x, y, u, v)}. \qquad \text{(E)}$$

El sistema de ecuaciones (D) en forma vectorial tiene la forma

$$(\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}_1)=0 \quad \text{y} \quad (\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}_2)=0,$$

donde $\mathbf{N}_1$ y $\mathbf{N}_2$ son vectores con coordenadas $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, -1, 0\right)$ y $\left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, 0, -1\right)$, dirigidos según las normales a las superficies cilíndricas tridimensionales buscadas, $u=u(x, y)$ y $v=v(x, y)$ respectivamente.

Por lo tanto, desde el punto de vista geométrico la integración del sistema (D) se reduce a la búsqueda de dos superficies cilíndricas tridimensionales $u=u(x, y)$ y $v=v(x, y)$, cuyas normales sean ortogonales a las líneas vectoriales en los puntos de intersección de las superficies.

Es evidente que esta condición se cumple si la superficie bidimensional S que es, en general, la intersección de las superficies tridimensionales cilíndricas $u=u(x, y)$ y $v=v(x, y)$ está formada por líneas vectoriales, ya que estas líneas estarán contenidas simultáneamente en las superficies $u=u(x, y)$ y $v=v(x, y)$ y, por consiguiente, serán ortogonales a los vectores $\mathbf{N}_1$ y $\mathbf{N}_2$. Tomando dos primeras integrales cualesquiera independientes con respecto a u y v, $\Phi_1(x, y, u, v)=0$ y $\Phi_2(x, y, u, v)=0$ del sistema (E); en otras palabras, tomando dos superficies vectoriales tridimensionales, obtenemos en su intersección, en general, una superficie bidimensional S formada por líneas vectoriales. En efecto, si cierto punto pertenece simultáneamente a las superficies vectoriales $\Phi_1(x, y, u, v)=0$ y $\Phi_2(x, y, u, v)=0$, entonces también la línea vectorial que pasa por este punto estará contenida en cada superficie.

Resolviendo el sistema de ecuaciones $\Phi_1(x, y, u, v)=0$ y $\Phi_2(x, y, u, v)=0$ con respecto a u y v, obtenemos las ecuaciones de dos superficies cilíndricas tridimensionales $u=u(x, y)$ y $v=v(x, y)$, cuya intersección es la misma superficie bidimensional S, compuesta por líneas vectoriales. En consecuencia, las funciones $u=u(x, y)$ y $v=v(x, y)$ halladas serán soluciones del sistema original.

La solución del sistema (D) que depende de dos funciones arbitrarias se puede hallar aplicando el mismo método, pero tomando las primeras integrales del sistema (E) en la forma más general:

$$\begin{aligned} &\Phi_1(\psi_1(x, y, u, v), \quad \psi_2(x, y, u, v), \quad \psi_3(x, y, u, v)) = 0, \\ &\Phi_2(\psi_1(x, y, u, v), \quad \psi_2(x, y, u, v), \quad \psi_3(x, y, u, v)) = 0, \end{aligned} \tag{F}$$

donde $\psi_1(x, y, u, v)$, $\psi_2(x, y, u, v)$ y $\psi_3(x, y, u, v)$ son primeras integrales independientes del sistema (E), y Φ_1 y Φ_2, funciones arbitrarias (véase la pág. 254)

Las ecuaciones (F), si las funciones compuestas Φ_1 y Φ_2 son independientes con respecto a u y v, determinan las soluciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ del sistema (D) como funciones implícitas de x e y, que dependen de la elección de las funciones arbitrarias Φ_1 y Φ_2.

§ 3. ECUACIONES DE PFAFF

En el § 2 hemos considerado dos problemas que surgen de modo natural al estudiar el campo vectorial continuo

$$\mathbf{F} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}.$$

Estos fueron los problemas sobre la determinación de las líneas vectoriales y de las superficies vectoriales.

Casi con la misma frecuencia surge el problema sobre la determinación de la familia de superficies $U(x, y, z) = c$, ortogonales a las líneas vectoriales. La ecuación de estas superficies tiene la forma $(\mathbf{F}.\mathbf{t}) = 0$, siendo t un vector contenido en el plano tangente a las superficies buscadas:

$$\mathbf{t} = \mathbf{i}\,dx + \mathbf{j}\,dy + \mathbf{k}\,dz$$

o, en forma desarrollada,

$$P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz = 0. \tag{5.21}$$

Las ecuaciones de la forma (5.21) se denominan *ecuaciones de Pfaff*.

Si el campo $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ es potencial:

$$\mathbf{F} = \operatorname{grad} U, \text{ es decir, } P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial U}{\partial z},$$

las superficies buscadas son superficies de nivel $U(x, y, z) = c$ de la función potencial U. En este caso, la determinación de éstas no representa dificultad, puesto que

$$U = \int_{(x_0,\, y_0,\, z_0)}^{(x,\, y,\, z)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

donde la integral curvilínea se toma por cualquier camino entre el punto fijo escogido (x_0, y_0, z_0) y el punto con coordenadas variables (x, y, z), por ejemplo, por la línea quebrada compuesta por segmentos de recta paralelos a los ejes de coordenadas.

Si, en cambio, el campo **F** no es potencial, en ciertos casos se puede escoger un factor escalar $\mu(x, y, z)$, luego de multiplicar al vector **F** por el cual el campo se haga potencial.

Si este factor existe, entonces $\mu\mathbf{F} = \operatorname{grad} U$, o bien

$$\mu P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \mu Q = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \mu R = \frac{\partial U}{\partial z},$$

por lo tanto,

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}, \quad \frac{\partial(\mu Q)}{\partial z} = \frac{\partial(\mu R)}{\partial y}, \quad \frac{\partial(\mu R)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu P)}{\partial z},$$

o bien

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{1}{\mu}\left(Q\frac{\partial \mu}{\partial x} - P\frac{\partial \mu}{\partial y}\right), \\ \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} &= \frac{1}{\mu}\left(R\frac{\partial \mu}{\partial y} - Q\frac{\partial \mu}{\partial z}\right), \\ \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{1}{\mu}\left(P\frac{\partial \mu}{\partial z} - R\frac{\partial \mu}{\partial x}\right). \end{aligned}$$

Multiplicando la primera identidad por R, la segunda por P, la tercera por Q y sumándolas miembro a miembro, se obtiene la condición necesaria de existencia del factor integrante μ:

$$R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) + P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) = 0,$$

o bien $(\mathbf{F} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F}) = 0$, donde el vector $\operatorname{rot} \mathbf{F}$—el rotacional del campo—se define por la igualdad

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

Si esta condición, llamada condición de *integración total* de la ecuación (5.21), no se cumple, entonces no existe ninguna familia de superficies $U(x, y, z) = c$ ortogonales a las líneas vectoriales del campo $\mathbf{F}(x, y, z)$.

En efecto, si tal familia $U(x, y, z) = c$ existiera, el primer miembro de la ecuación (5.21) podría diferenciarse de

$$\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

sólo en cierto factor $\mu(x, y, z)$, el cual sería precisamente factor integrante de la ecuación (5.21).

De esta manera, para la existencia de la familia de superficies $U(x, y, z) = c$, ortogonales a las líneas vectoriales del campo **F**, es necesario que los vectores **F** y rot **F** sean ortogonales, es decir, que $(\mathbf{F} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F}) \equiv 0$.

Observación. La condición $(\mathbf{F}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{F})=0$ es llamada también condición de integración de la ecuación de Pfaff $P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0$ mediante una sola relación $U(x, y, z)=c$.

A veces se exige determinar no las superficies ortogonales a las líneas vectoriales del campo $\mathbf{F}$, sino las líneas que poseen dichas propiedades; en otras palabras, hay que integrar la ecuación de Pfaff no mediante una, sino mediante las dos relaciones

$$U_1(x, y, z)=0 \quad \text{y} \quad U_2(x, y, z)=0. \tag{5.22}$$

Para hallar estas líneas, se puede dar arbitrariamente una de las ecuaciones (5.22), por ejemplo,

$$U_1(x, y, z)=0 \tag{5.23}$$

y eliminando de la ecuación (5.21), mediante la (5.23), una de las variables, por ejemplo z, se obtiene una ecuación diferencial de la forma

$$M(x, y)\,dx+N(x, y)\,dy=0,$$

integrando la cual se hallan las líneas buscadas en la superficie $U_1(x, y, z)=0$ elegida arbitrariamente.

Demostremos que la condición $(\mathbf{F}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{F})=0$ es no solamente necesaria, sino también suficiente para la existencia de la familia de superficies ortogonales a las líneas vectoriales.

Obsérvese que en las superficies buscadas $U(x, y, z)=c$, la ecuación

$$P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0$$

debe reducirse a una identidad, o bien, lo que es lo mismo, en estas superficies la integral curvilínea

$$\int_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz \tag{5.24}$$

debe ser igual a cero por cualquier camino (entre ellos también por caminos no cerrados).

Consideremos todas las superficies rotacionales posibles, o sea, las superficies vectoriales del campo rot $\mathbf{F}$. Es evidente que en virtud del teorema de Stokes es

$$\int_C \mathbf{F}d\mathbf{r}=\iint_D \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma,$$

donde $d\mathbf{r}=\mathbf{i}\,dx+\mathbf{j}\,dy+\mathbf{k}\,dz$ y la integral (5.24) por cualquier camino cerrado en una superficie rotacional es igual a cero (ya que el producto escalar del vector unitario de la normal $\mathbf{n}$ a la superficie y del vector rot $\mathbf{F}$ es igual a cero). Tomemos ahora aquellas

superficies rotacionales en las que todas las integrales

$$\int_L \mathbf{F}\,d\mathbf{r} = \int_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

sean iguales a cero también por caminos no cerrados. Para construir una de estas superficies, que pase por un punto dado

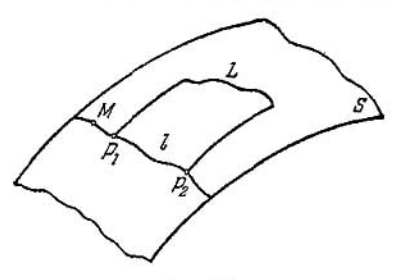


Fig. 5.2

$M(x_0, y_0, z_0)$, se traza por M alguna línea ortogonal a las líneas vectoriales del campo **F**. Estas líneas se determinan por la ecuación

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0, \tag{5.21}$$

a la cual se le agrega la ecuación $z = f(x, y)$ de la superficie arbitraria que pasa por el punto M (lo más frecuente es tomar la ecuación de esta superficie en la forma $z = f_1(x)$ ó $z = f_2(y)$, o aún en la forma $z = a$, donde a es una constante). Sustituyendo $z = f(x, y)$ en (5.21), obtenemos una ecuación ordinaria de la forma

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0.$$

Al integrar ésta, considerando la condición inicial $y(x_0) = y_0$, se obtiene la curva l buscada que pasa por el punto $M(x_0, y_0, z_0)$ y es ortogonal a las líneas vectoriales (fig. 5.2).

Si esta línea no es línea rotacional *), trazando por cada punto de l una línea rotacional, obtenemos la superficie S buscada, ortogonal a las líneas vectoriales del campo **F**.

En efecto, tomando cualquier curva no cerrada L en la superficie S (fig. 5.2) y trazando líneas rotacionales por sus puntos frontera hasta que se corten con la curva l en los puntos p_1 y p_2,

---

*) Se llaman líneas rotacionales a las líneas vectoriales del campo *rot F (N. de la Red.)*.

obtenemos una curva cerrada, formada por el segmento de la línea l, determinado por los puntos p_1 y p_2, la curva L y las dos líneas rotacionales.

La integral curvilínea $\int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, tomada sobre esta curva cerrada C, es igual a cero, puesto que el contorno está contenido en la superficie rotacional; además, la misma integral, tomada sobre el segmento de arco l y sobre los segmentos de las líneas rotacionales, es igual a cero, puesto que el arco l y las líneas rotacionales son ortogonales a las líneas vectoriales del campo **F** (las líneas rotacionales son ortogonales a las líneas vectoriales del campo **F** debido a la condición $(\mathbf{F}\cdot \operatorname{rot} \mathbf{F})=0$). Por lo tanto, la integral $\int_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, tomada por un camino no cerrado L escogido arbitrariamente es igual a cero, es decir, la superficie S es la superficie integral de la ecuación (5.21) que pasa por el punto dado M.

Este método de demostración de que la condición $(\mathbf{F}\cdot \operatorname{rot} \mathbf{F})=0$ es suficiente para la existencia de una familia de superficies ortogonales a las líneas vectoriales del campo **F**, da a la vez un camino—aunque no el más corto—para hallar estas superficies.

Ejemplo 1.

$$z\,dx + (x-y)\,dy + zy\,dz = 0.$$

La condición $(\mathbf{F}\cdot \operatorname{rot} \mathbf{F})=0$, donde $\mathbf{F}=z\mathbf{i}+(x-y)\mathbf{j}+zy\mathbf{k}$, no se cumple; por consiguiente, la ecuación considerada no se integra mediante una sola relación.

Ejemplo 2.

$$(6x+yz)\,dx + (xz-2y)\,dy + (xy+2z)\,dz = 0.$$

Como $\operatorname{rot} \mathbf{F}=0$, donde $\mathbf{F}=(6x+yz)\mathbf{i}+(xz-2y)\mathbf{j}+(xy+2z)\mathbf{k}$, entonces $\mathbf{F}=\operatorname{grad} U$, siendo

$$U=\int_{(0,\,0,\,0)}^{(x,\,y,\,z)} (6x+yz)\,dx+(xz-2y)\,dy+(xy+2z)\,dz.$$

Tomemos como camino de integración una línea quebrada con segmentos paralelos a los ejes de coordenadas. Integrando, obtenemos $U=3x^2-y^2+z^2+xyz$, por lo tanto, la integral buscada será

$$3x^2-y^2+z^2+xyz=c.$$

Ejemplo 3.

$$yz\,dx+2xz\,dy+xy\,dz=0,$$

$$\mathbf{F}=yz\mathbf{i}+2xz\mathbf{j}+xy\mathbf{k}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{F}=-x\mathbf{i}+z\mathbf{k}.$$

La condición de integrabilidad $(\mathbf{F}\cdot \operatorname{rot} \mathbf{F})=0$ se cumple. En cualquier superficie, por ejemplo en el plano $z=1$, hallemos las curvas ortogonales a las líneas vectoriales:

$$z=1, \quad y\,dx+2x\,dy=0, \quad xy^2=a.$$

Tracemos por las curvas de la familia $z=1$, $xy^2=a$, las superficies rotacionales, para lo cual se integra el sistema de ecuaciones de las líneas rotacionales

$$\frac{dx}{-x}=\frac{dy}{0}=\frac{dz}{z}, \quad y=c_1, \quad xz=c_2.$$

Eliminando x, y y z de las ecuaciones $z=1$, $xy^2=a$, $y=c_1$, $xz=c_2$, obtenemos $c_1^2c_2=a$. Por lo tanto, la integral buscada de la ecuación original tiene la forma $xy^2z=a$.

Observación. Otro método utilizado comúnmente para integrar la ecuación de Pfaff

$$P(x, y, z)\,dx+Q(x, y, z)\,dy+R(x, y, z)\,dz=0 \qquad (5.21)$$

consiste en considerar al principio a z (o a otra variable) constante e integrar la ecuación ordinaria

$$P(x, y, z)\,dx+Q(x, y, z)\,dy=0, \qquad (5.25)$$

en la que z hace las veces de parámetro.

Luego de obtener la integral de la ecuación (5.25)

$$U(x, y, z)=c(z) \qquad (5.26)$$

en la cual la constante arbitraria puede ser función del parámetro z, se toma $c(z)$ de manera que se satisfaga la ecuación (5.21). Derivando (5.26), se obtiene

$$\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\left[\frac{\partial U}{\partial z}-c'(z)\right]dz=0. \qquad (5.27)$$

Los coeficientes de las diferenciales de las variables en las ecuaciones (5.21) y (5.27) deben ser proporcionales

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{P}=\frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{Q}=\frac{\frac{\partial U}{\partial z}-c'(z)}{R}.$$

De la ecuación $\dfrac{\frac{\partial U}{\partial x}}{P}=\dfrac{\frac{\partial U}{\partial z}-c'(z)}{R}$ se puede determinar $c'(z)$, puesto que se puede demostrar que al cumplirse la condición $(\mathbf{F}\cdot \mathrm{rot}\,\mathbf{F})=0$ esta ecuación contiene sólo z, $c'(z)$ y $U(x, y, z)=c(z)$.

§ 4. ECUACIONES NO LINEALES DE PRIMER ORDEN

Consideremos primeramente el caso en que la función buscada depende de dos variables independientes. Las ecuaciones en derivadas parciales de primer orden con tres variables tienen la forma

$$F(x, y, z, p, q)=0, \qquad (5.28)$$

donde

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

La ecuación diferencial (5.28), en cada punto (x, y, z) de la región en que varían los tres primeros argumentos, establece una dependencia $\varphi(p, q) = 0$ entre los números p y q, los cuales determinan la dirección de la normal $\mathbf{N}(p, q, -1)$ a las *superficies integrales* $z = z(x, y)$ buscadas de la ecuación (5.28).

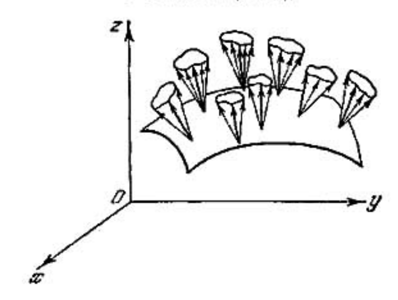


Fig. 5.3

De este modo, la dirección de la normal a las superficies integrales buscadas en cierto punto (x, y, z) no se determinan exactamente, sino que sólo se obtiene una familia monoparamétrica de las direcciones admisibles de las normales, más exactamente, cierto cono de direcciones admisibles de las normales $\mathbf{N}(p, q, -1)$, donde p y q satisfacen la ecuación $\varphi(p, q) = 0$ (fig. 5.3).

Por consiguiente, el problema de la integración de la ecuación (5.28) se reduce a hallar las superficies $z = z(x, y)$, cuyas normales posean en cada punto una de las direcciones admisibles del cono de normales en dicho punto.

Partiendo de esta interpretación geométrica, indiquemos un método de determinación de la integral de la ecuación (5.28) dependiente de una función arbitraria, si se conoce su integral $\Phi(x, y, z, a, b) = 0$, que dependa de dos parámetros a y b.

La integral $\Phi(x, y, z, a, b) = 0$ de la ecuación (5.28) que depende de dos constantes arbitrarias independientes a y b, se llama *integral completa o total*.

Como la ecuación diferencial original (5.28) impone limitaciones sólo a la dirección de las normales a las superficies integrales buscadas, entonces cada superficie cuya normal coincida con las normales a las superficies integrales en los mismos puntos, será super-

ficie integral. En consecuencia, las envolventes de una familia dependiente de uno o de dos parámetros de superficies integrales serán también superficies integrales debido a que la normal a la envolvente coincide con la normal a una de las superficies integrales de la familia que pasa por dicho punto.

La envolvente de la familia de superficies integrales dependiente de dos parámetros, bajo la hipótesis de la existencia de derivadas parciales acotadas $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial y}$ y $\frac{\partial\Phi}{\partial z}$ que no se anulen simultánemente, y de la existencia de las derivadas $\frac{\partial\Phi}{\partial a}$ y $\frac{\partial\Phi}{\partial b}$, se determina por las ecuaciones

$$\Phi(x, y, z, a, b)=0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial a}=0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial b}=0. \tag{5.29}$$

Eligiendo arbitrariamente de la familia de superficies integrales $\Phi(x, y, z, a, b)=0$, que depende de dos parámetros, una familia monoparamétrica, para lo cual se considera a b como función derivable arbitraria del parámetro a, y hallando la envolvente de la familia monoparamétrica $\Phi(x, y, z, a, b(a))=0$, obtenemos también una superficie integral. La envolvente de esta familia monoparamétrica, bajo la hipótesis de la existencia de derivadas acotadas de la función Φ respecto a todos sus argumentos, y de que las derivadas $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial y}$ y $\frac{\partial\Phi}{\partial z}$ no se anulen simultáneamente, se determina por las ecuaciones

$$\Phi(x, y, z, a, b(a))=0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial a}\{\Phi(x, y, z, a, b(a))\}=0,$$

o bien

$$\Phi(x, y, z, a, b(a))=0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial\Phi}{\partial a}+\frac{\partial\Phi}{\partial b}b'(a)=0. \tag{5.30}$$

Estas dos ecuaciones determinan un conjunto de superficies integrales que dependen de la elección de la función arbitraria $b=b(a)$. El hecho de que las ecuaciones (5.30) contengan una función arbitraria, claro está, no da derecho a afirmar que las ecuaciones (5.30) definen el conjunto de todas las superficies integrales de la ecuación original (5.28) sin excepción; por ejemplo, este conjunto no contiene, en general, la superficie integral determinada por las ecuaciones (5.29). Pero de todos modos, como las ecuaciones (5.30) contienen una función arbitraria, esto ya permite, por lo general, obtener la superficie integral que satisfaga las condiciones iniciales de Cauchy dadas (véase la pág 247).

De este modo, conociendo la integral completa, ya se puede construir una integral que dependa de una función arbitraria.

En muchos casos la determinación de la integral completa no presenta dificultad alguna, por ejemplo:

1) Si la ecuación (5.28) tiene la forma $F(p, q)=0$, ó $p=\varphi(q)$, entonces haciendo $q=a$, donde a es una constante arbitraria, obtenemos

$$p=\varphi(a), \quad dz=p\,dx+q\,dy=\varphi(a)\,dx+a\,dy,$$

de donde

$$z=\varphi(a)\,x+ay+b,$$

es la integral completa.

2) Si la ecuación (5.28) puede reducirse a la forma $\varphi_1(x, p)=\varphi_2(y, q)$, entonces haciendo $\varphi_1(x, p)=\varphi_2(y, q)=a$, donde a es una constante arbitraria, y resolviendo (si es posible) con respecto a p y q, obtenemos $p=\psi_1(x, a)$, $q=\psi_2(y, a)$,

$$dz=p\,dx+q\,dy=\psi_1(x, a)\,dx+\psi_2(y, a)\,dy,$$

$$z=\int\psi_1(x, a)\,dx+\int\psi_2(y, a)\,dy+b,$$

que es la integral completa.

3) Si la ecuación (5.28) tiene la forma $F(z, p, q)=0$, entonces haciendo $z=z(u)$, donde $u=ax+y$, obtenemos

$$F\left(z, a\frac{dz}{du}, \frac{dz}{du}\right)=0.$$

Integrando esta ecuación ordinaria, se obtiene $z=\Phi(u, a, b)$ siendo b una constante arbitraria, o bien

$$z=\Phi(ax+y, a, b),$$

que es la integral completa.

4) Si la ecuación (5.28) tiene forma parecida a la de la ecuación de Clairaut:

$$z=px+qy+\varphi(p, q)$$

entonces, como no es difícil comprobar por sustitución directa, la integral completa es

$$z=ax+by+\varphi(a, b).$$

Ejemplo 1. Hallar la integral completa de la ecuación $p=3q^3$.

$$q=a, \quad p=3a^3, \quad dz=3a^3dx+a\,dy,$$

$$z=3a^3x+ay+b$$

Ejemplo 2. Hallar la integral completa de la ecuación $pq=2xy$.

$$\frac{p}{x}=\frac{2y}{q}=a, \quad p=ax, \quad q=\frac{2y}{a}, \quad dz=ax\,dx+\frac{2y}{a}\,dy,$$

$$z=\frac{ax^2}{2}+\frac{y^2}{a}+b.$$

Ejemplo 3. Hallar la integral completa de la ecuación $z^3 = pq^2$.

$$z = z(u), \quad \text{donde} \quad u = ax + y, \quad p = a\frac{dz}{du}, \quad q = \frac{dz}{du},$$

$$z^3 = a\left(\frac{dz}{du}\right)^3, \text{ o bien } \frac{dz}{du} = a_1 z, \quad \text{donde} \quad a_1 = a^{-\frac{1}{3}},$$

$$\ln|z| = a_1 u + \ln b, \quad z = be^{a_1 u},$$

$$z = be^{a_1\left(\frac{x}{a_1^3} + y\right)}.$$

Ejemplo 4. Hallar la integral completa de la ecuación

$$z = px + qy + p^2 + q^2.$$

La integral completa es

$$z = ax + by + a^2 + b^2.$$

En casos más complejos se aplica uno de los métodos generales de determinación de la integral completa de la ecuación

$$F(x, y, z, p, q) = 0.$$

El más simple, desde el punto de vista de la idea en que está basado, es el *método de Lagrange y Sharpy*. Por este método, para la ecuación

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \tag{5.28}$$

se escoge la ecuación

$$U(x, y, z, p, q) = a \tag{5.31}$$

de manera que las funciones $p = p(x, y, z, a)$ y $q = q(x, y, z, a)$ determinadas del sistema de ecuaciones (5.28) y (5.31) nos lleven a la ecuación de Pfaff

$$dz = p(x, y, z, a)\,dx + q(x, y, z, a)\,dy, \tag{5.32}$$

integrable mediante una sola relación. Entonces la integral $\Phi(x, y, z, a, b) = 0$ de la ecuación de Pfaff, donde b es una constante arbitraria que aparece al integrar la ecuación (5.32), será la integral completa de la ecuación (5.28). La función U se determina de las condiciones de integración de la ecuación (5.32) mediante una sola relación:

$$(\mathbf{F} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F}) = 0, \quad \text{donde} \quad \mathbf{F} = p(x, y, z, a)\,\mathbf{i} + q(x, y, z, a)\,\mathbf{j} - \mathbf{k},$$

es decir, en forma desarrollada, de la ecuación

$$p\frac{\partial q}{\partial z} - q\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \tag{5.33}$$

Las derivadas $\frac{\partial q}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$, $\frac{\partial p}{\partial z}$ y $\frac{\partial q}{\partial z}$ se calculan derivando las identidades

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z, p, q) = 0,\\ U(x, y, z, p, q) = a, \end{aligned}\right\} \tag{5.34}$$

en las cuales p y q se consideran como funciones de x, y y z determinadas por el sistema (5.34).

Derivando con respecto a x, se obtiene

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} = 0,$$

de donde

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\dfrac{D(F, U)}{D(p, x)}}{\dfrac{D(F, U)}{D(p, q)}}.$$

Análogamente, derivando la ecuación (5.34) con respecto a y y determinando $\frac{\partial p}{\partial y}$, obtenemos

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\dfrac{D(F, U)}{D(y, q)}}{\dfrac{D(F, U)}{D(p, q)}}.$$

Derivando (5.34) con respecto a z y resolviendo con respecto a $\frac{\partial p}{\partial z}$ y a $\frac{\partial q}{\partial z}$, tendremos

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\dfrac{D(F, U)}{D(z, q)}}{\dfrac{D(F, U)}{D(p, q)}},$$
$$\frac{\partial q}{\partial z} = -\frac{\dfrac{D(F, U)}{D(p, z)}}{\dfrac{D(F, U)}{D(p, q)}}.$$

Sustituyendo las derivadas calculadas en la condición de integrabilidad (5.33) y multiplicando por el determinante $\frac{D(F, U)}{D(p, q)}$, el cual se considera diferente de cero, se tendrá

$$p\left(\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial U}{\partial z}\right) + q\left(\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial q} - \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial U}{\partial z}\right) +$$
$$+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial q} - \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial U}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial U}{\partial x}\right) = 0,$$

o bien

$$\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial U}{\partial y}+\left(p\frac{\partial F}{\partial p}+q\frac{\partial F}{\partial q}\right)\frac{\partial U}{\partial z}-$$
$$-\left(\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial U}{\partial p}-\left(\frac{\partial F}{\partial y}+q\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial U}{\partial q}=0. \qquad (5.35)$$

Para determinar la función U se obtuvo la ecuación lineal homogénea (5.35), que se integra por el método señalado en el § 2 de este capítulo: se escribe la ecuación de las características

$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial p}}=\frac{dy}{\frac{\partial F}{\partial q}}=\frac{dz}{p\frac{\partial F}{\partial p}+q\frac{\partial F}{\partial q}}=-\frac{dp}{\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{dq}{\frac{\partial F}{\partial y}+q\frac{\partial F}{\partial z}}, \qquad (5.36)$$

se halla por lo menos una primera integral del sistema (5.36)

$$U_1(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=a$$

y, si las funciones F y U_1 son independientes con respecto a p y q, o sea, si $\frac{D(F,\ U_1)}{D(p,\ q)}\neq 0$, la primera integral $U_1(x,\ y,\ z,\ p,\ q)$ será la solución buscada de la ecuación (5.35).

Por lo tanto, determinando $p=p(x,\ y,\ z,\ a)$ y $q=q(x,\ y,\ z,\ a)$ del sistema de ecuaciones

$$F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=0,$$
$$U_1(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=a$$

y sustituyéndolas en

$$dz=p(x,\ y,\ z,\ a)\,dx+q(x,\ y,\ z,\ a)\,dy,$$

se obtiene una ecuación de Pfaff, integrable mediante una sola relación, resolviendo la cual se halla la integral completa de la ecuación original

$$\Phi(x,\ y,\ z,\ a,\ b)=0.$$

Ejemplo 5. Hallar la integral completa de la ecuación

$$yzp^2-q=0. \qquad (5.37)$$

El sistema (5.36) tiene la forma

$$\frac{dx}{2pyz}=-dy=\frac{dz}{2p^2yz-q}=-\frac{dp}{yp^3}=-\frac{dq}{zp^2+yp^2q}.$$

Utilizando la ecuación original simplificamos el denominador de la tercera razón, y obtenemos la combinación integrable $\frac{dz}{p^2yz}=-\frac{dp}{p^3y}$, de donde

$$p=\frac{a}{z}. \qquad (5.38)$$

De las ecuaciones (5.37) y (5.38) se halla $p=\frac{a}{z}$, $q=\frac{a^2y}{z}$, de donde $dz=\frac{a}{z}dx+\frac{a^2y}{z}dy$. Multiplicando por $2z$ e integrando, se halla la integral completa de la ecuación original $z^2=2ax+a^2y^2+b$

Conociendo la integral completa $\Phi(x, y, z, a, b)=0$ de la ecuación

$$F(x, y, z, p, q)=0$$

se puede, en general, resolver el problema inicial fundamental (véase la pág. 247), y aún el problema más general de hallar la superficie integral que pase por la curva dada

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t). \tag{5.39}$$

Determinemos la función $b=b(a)$ de manera que la envolvente de la familia monoparamétrica

$$\Phi(x, y, z, a, b(a))=0 \tag{5.40}$$

determinada por las ecuaciones (5.40) y

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a}+\frac{\partial\Phi}{\partial b}b'(a)=0 \tag{5.41}$$

pase por la curva dada (5.39).

En los puntos de la curva dada las ecuaciones (5.40) y (5.41) se transforman en identidades con respecto a t:

$$\Phi(x(t), y(t), z(t), a, b(a))=0 \tag{5.42}$$

y

$$\frac{\partial\Phi(x(t), y(t), z(t), a, b(a))}{\partial a}+\frac{\partial\Phi(x(t), y(t), z(t), a, b(a))}{\partial b}b'(a)=0. \tag{5.43}$$

Sin embargo, sería muy difícil determinar la función $b=b(a)$ de estas ecuaciones. Es mucho más simple determinar esta función a partir del sistema (5.42) y de

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}x'(t)+\frac{\partial\Phi}{\partial y}y'(t)+\frac{\partial\Phi}{\partial z}z'(t)=0, \tag{5.44}$$

o, en forma compacta,

$$(\mathbf{N}\cdot\mathbf{t})=0,$$

donde $\mathbf{t}$ es el vector tangente a la curva dada

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t) \tag{5.39}$$

y $\mathbf{N}$, el vector normal a la superficie $\Phi=0$ y, por lo tanto, a la envolvente buscada en los puntos correspondientes. La condición

(5.44) es geométricamente evidente, ya que la superficie buscada debe pasar por la curva dada y, por consiguiente, la tangente a esta curva debe estar contenida en el plano tangente a la superficie buscada.

Ejemplo 6. Hallar la superficie integral de la ecuación $z=px+qy+\frac{pq}{4}$ que pase por la curva $y=0$, $z=x^2$.

La integral completa de la ecuación (véase el caso 4 en la pág. 269) tiene la forma $z=ax+by+\frac{ab}{4}$. La ecuación de la curva dada se puede escribir en forma paramétrica: $x=t$, $y=0$, $z=t^2$.

Para determinar la función $b=b(a)$, escribimos el sistema de ecuaciones (5.42) y (5.44) que, en el caso dado, tienen la forma $t^2=at+\frac{ab}{4}$ y $2t=a$, de donde $b=-a$, $z=a(x-y)-\frac{a^2}{4}$. La envolvente de esta familia se determina por las ecuaciones

$$z=a(x-y)-\frac{a^2}{4}$$

y

$$x-y-\frac{a}{2}=0.$$

Eliminando a se obtiene $z=(x-y)^2$.

Si el sistema (5.36) (pág. 271) se integra fácilmente, entonces para resolver el problema generalizado de Cauchy es muy útil el método que se expone a continuación, llamado *método de las características o de Cauchy.*

La *superficie integral* $z=z(x, y)$ de la ecuación

$$F(x, y, z, p, q)=0$$

que pasa por la curva dada

$$x_0=x_0(s),\ y_0=y_0(s),\ z_0=z_0(s)$$

se puede, al igual que para la ecuación cuasilineal (véase la pág. 252), imaginar formada por puntos pertenecientes a cierta familia monoparamétrica de curvas, llamadas *características*,

$$x=x(t, s),\ y=y(t, s),\ z=z(t, s),$$

donde s es el parámetro de la familia.

Primero se halla una familia de características que dependa de varios parámetros y después, trazando las características que pasen por los puntos de la curva

$$x_0=x_0(s),\ y_0=y_0(s),\ z_0=z_0(s)$$

y satisfaciendo además otras condiciones, se obtiene una familia

monoparamétrica de curvas, en las cuales se puede considerar a s como parámetro:

$$x=x(t,\ s),\ y=y(t,\ s),\ z=z(t,\ s)$$

(fig. 5.4). El conjunto de puntos pertenecientes a estas curvas forma la superficie integral buscada. En esto consiste, en rasgos generales, la idea del método de Cauchy.

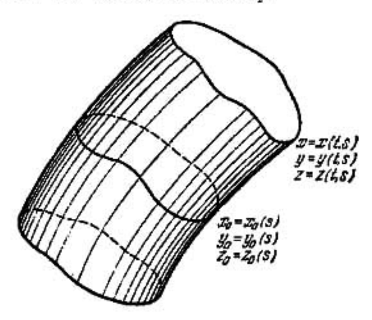


Fig. 5.4

Sea $z=z(x,\ y)$ la superficie integral de la ecuación

$$F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=0. \tag{5.45}$$

Derivando la identidad (5.45) con respecto a x y a y, obtenemos

$$F_x+pF_z+F_p\frac{\partial p}{\partial x}+F_q\frac{\partial q}{\partial x}=0,$$

$$F_y+qF_z+F_p\frac{\partial p}{\partial y}+F_q\frac{\partial q}{\partial y}=0,$$

o bien, como $\frac{\partial q}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial y}$,

$$\left.\begin{aligned}F_x+F_zp+F_p\frac{\partial p}{\partial x}+F_q\frac{\partial p}{\partial y}=0,\\ F_y+F_zq+F_p\frac{\partial q}{\partial x}+F_q\frac{\partial q}{\partial y}=0.\end{aligned}\right\} \tag{5.46}$$

Las ecuaciones de las características para el sistema de ecuaciones (5.46), cuasilineal con respecto a p y q, donde z se considera función conocida de x e y, tienen la forma (véase la pág. 259)

$$\frac{dx}{F_p}=\frac{dy}{F_q}=-\frac{dp}{F_x+pF_z}=-\frac{dq}{F_y+qF_z}=dt. \tag{5.47}$$

Como z está relacionada con p y q mediante la ecuación

$$dz = pdx + qdy, \tag{5.48}$$

entonces a lo largo de una característica será

$$\frac{dz}{dt} = p\frac{dx}{dt} + q\frac{dy}{dt} = pF_p + qF_q,$$

o bien

$$\frac{dz}{pF_p + qF_q} = dt, \tag{5.49}$$

lo cual da la posibilidad de completar el sistema (5.47) con una ecuación más, la (5.49).

De esta manera, bajo la hipótesis de que $z = z(x, y)$ es solución de la ecuación (5.45), se llega al sistema

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{pF_p + qF_q} = -\frac{dp}{F_x + pF_z} = -\frac{dq}{F_y + qF_z} = dt. \tag{5.50}$$

De las ecuaciones (5.50) se puede, sin conocer la solución $z = z(x, y)$ de la ecuación (5.45), hallar las funciones $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $p = p(t)$ y $q = q(t)$, es decir, se pueden hallar las curvas

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),$$

llamadas *características*, y determinar en cada punto de la característica los números $p = p(t)$ y $q = q(t)$ que determinan la dirección del plano

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y). \tag{5.51}$$

Las características, conjuntamente con el plano (5.51), tomado en cada uno de sus puntos, se llama *banda característica.*

Demostremos que la superficie integral buscada de la ecuación $F(x, y, z, p, q) = 0$ se puede formar por características.

Obsérvese ante todo que a lo largo de una curva integral del sistema (5.50) la función F conserva su valor contante,

$$F(x, y, z, p, q) = c;$$

en otras palabras, la función $F(x, y, z, p, q)$ es primera integral del sistema (5.50).

En efecto, a lo largo de una curva integral del sistema (5.50) es

$$\frac{d}{dt}F(x, y, z, p, q) = F_x\frac{dx}{dt} + F_y\frac{dy}{dt} + F_z\frac{dz}{dt} + F_p\frac{dp}{dt} + F_q\frac{dq}{dt} =$$

$$= F_xF_p + F_yF_q + F_z(pF_p + qF_q) - F_p(F_x + pF_z) - F_q(F_y + qF_z) = 0;$$

por lo tanto, a lo largo de una curva integral del sistema (5.50) será

$$F(x, y, z, p, q) = c, \text{ donde } c = F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0).$$

Para que a lo largo de las curvas integrales del sistema (5.50) se satisfaga la ecuación $F(x, y, z, p, q)=0$ es necesario escoger los valores iniciales $x_0(s)$, $y_0(s)$, $z_0(s)$, $p_0(s)$ y $q_0(s)$ de manera que satisfagan la ecuación

$$F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)=0.$$

Integrando el sistema (5.50) para valores iniciales $x_0=x_0(s)$, $y_0=y_0(s)$, $z_0=z_0(s)$, $p_0=p_0(s)$ y $q_0=q_0(s)$ que satisfagan la ecuación $F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)=0$, se obtiene $x=x(t, s)$, $y=y(t, s)$, $z=z(t, s)$, $p=p(t, s)$ y $q=q(t, s)$.

Para s fijo, tendremos una de las características

$$x=x(t, s),\ y=y(t, s),\ z=z(t, s);$$

variando s, se obtiene cierta superficie. En cada punto de ésta, para $p=p(t, s)$ y $q=q(t, s)$ la ecuación $F(x, y, z, p, q)=0$ se satisface, pero hay que verificar además si se cumple que $p=\frac{\partial z}{\partial x}$ y $q=\frac{\partial z}{\partial y}$ o, lo que es lo mismo, si se cumple que $dz=p\,dx+q\,dy$, o bien

$$dz=p\left(\frac{\partial x}{\partial s}ds+\frac{\partial x}{\partial t}dt\right)+q\left(\frac{\partial y}{\partial s}ds+\frac{\partial y}{\partial t}dt\right)=\frac{\partial z}{\partial s}ds+\frac{\partial z}{\partial t}dt,$$

lo cual equivale a las dos condiciones

$$p\frac{\partial x}{\partial s}+q\frac{\partial y}{\partial s}-\frac{\partial z}{\partial s}=0, \tag{5.52}$$

$$p\frac{\partial x}{\partial t}+q\frac{\partial y}{\partial t}-\frac{\partial z}{\partial t}=0. \tag{5.53}$$

La segunda ecuación se transforma, evidentemente, en una identidad, puesto que al formar el sistema (5.50) ya se exigió que a lo largo de una característica se cumpla que $dz=p\,dx+q\,dy$. A propósito, es fácil comprobar esto también directamente, si se toma en cuenta que, en virtud del sistema (5.50),

$$\frac{\partial x}{\partial t}=F_p,\ \frac{\partial y}{\partial t}=F_q,\ \frac{\partial z}{\partial t}=pF_p+qF_q$$

(hemos escrito $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ y $\frac{dz}{dt}$ en lugar de $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$ y $\frac{\partial z}{\partial t}$ en (5.50), ya que s se considera fija).

Para que se satisfaga la ecuación (5.52) es necesario establecer ciertas limitaciones más a la elección de los valores iniciales $x_0(s)$, $y_0(s)$, $z_0(s)$, $p_0(s)$ y $q_0(s)$. En efecto, designemos

$$p\frac{\partial x}{\partial s}+q\frac{\partial y}{\partial s}-\frac{\partial z}{\partial s}=U \tag{5.54}$$

y demostremos que $U\equiv 0$, si el valor inicial es $U|_{t=0}=0$, de

donde se deducirá que si las funciones iniciales

$$x_0(s),\ y_0(s),\ z_0(s),\ p_0(s),\ q_0(s)$$

se toman de manera que

$$p_0(s)\,x_0'(s)+q_0(s)\,y_0'(s)-z_0'(s)=0,$$

entonces será $U\equiv 0$ para todas las t.

Derivando (5.54) con respecto a t, se obtiene

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial s}+p\frac{\partial^2 x}{\partial t\partial s}+\frac{\partial q}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial s}+q\frac{\partial^2 y}{\partial t\partial s}-\frac{\partial^2 z}{\partial t\partial s}.$$

Tomando en cuenta el resultado de la derivación de la identidad (5.53) con respecto a s:

$$\frac{\partial p}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial t}+p\frac{\partial^2 x}{\partial s\partial t}+\frac{\partial q}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial t}+q\frac{\partial^2 y}{\partial s\partial t}-\frac{\partial^2 z}{\partial s\partial t}=0,$$

tendremos

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial q}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial s}-\frac{\partial p}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial t}-\frac{\partial q}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial t},$$

o bien, debido a la ecuación (5.50),

$$\frac{\partial U}{\partial t}=-(F_x+pF_z)\frac{\partial x}{\partial s}-(F_y+qF_z)\frac{\partial y}{\partial s}-F_p\frac{\partial p}{\partial s}-F_q\frac{\partial q}{\partial s}=$$
$$=-\left(F_x\frac{\partial x}{\partial s}+F_y\frac{\partial y}{\partial s}+F_z\frac{\partial z}{\partial s}+F_p\frac{\partial p}{\partial s}+F_q\frac{\partial q}{\partial s}\right)-$$
$$-F_z\left(p\frac{\partial x}{\partial s}+q\frac{\partial y}{\partial s}-\frac{\partial z}{\partial s}\right)=-\frac{\partial}{\partial s}\{F\}-F_zU=-F_zU,$$

puesto que $F\equiv 0$ y, por consiguiente, la derivada parcial total $\frac{\partial}{\partial s}\{F\}\equiv 0$. De la ecuación

$$\frac{\partial U}{\partial t}=-F_zU \tag{5.55}$$

se halla que $U=U_0e^{-\int_0^t F_z dt}$. Por lo tanto, si $U_0=0$, entonces $U\equiv 0$, lo cual, dicho sea de paso, también se deduce de la unicidad de la solución $U\equiv 0$ de la ecuación lineal (5.55) que satisface la condición $U|_{t=0}=0$.

De este modo, al integrar la ecuación

$$F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=0 \tag{5.45}$$

con las condiciones iniciales $x_0=x_0(s)$, $y_0=y_0(s)$ y $z_0=z_0(s)$, por el método de Cauchy, deben determinarse las funciones $p_0=p_0(s)$ y $q_0=q_0(s)$ de las ecuaciones

$$F(x_0(s),\ y_0(s),\ z_0(s),\ p_0(s),\ q_0(s))=0$$

y

$$p_0(s)\,x_0'(s)-q_0(s)\,y_0'(s)-z_0'(s)=0$$

y luego integrar el sistema de ecuaciones

$$\frac{dx}{F_p}=\frac{dy}{F_q}=\frac{dz}{pF_p+qF_q}=-\frac{dp}{F_x+pF_z}=-\frac{dq}{F_y+qF_z}=dt \qquad (5.50)$$

con las condiciones iniciales: para $t=0$ debe ser

$$x=x_0(s),\ y=y_0(s),\ z=z_0(s),\ p=p_0(s),\ q=q_0(s).$$

Las tres funciones

$$x=x(t,\ s),\ y=y(t,\ s),\ z=z(t,\ s)$$

de la solución del sistema (5.50) dan en forma paramétrica la ecuación de la superficie integral buscada de la ecuación (5.45).

Todo lo que acabamos de exponer se generaliza fácilmente para las ecuaciones no lineales en derivadas parciales con un número arbitrario de variables independientes

$$F(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n, z,\ p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n)=0, \qquad (5.56)$$

donde

$$p_i=\frac{\partial z}{\partial x_i}\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Se exige determinar la superficie integral n-dimensional $z=z(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ de la ecuación (5.56) que pase por una superficie $(n-1)$-dimensional dada:

$$\begin{gathered} x_{i0}=x_{i0}(s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_{n-1})\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \\ z_0=z_0(s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_{n-1}). \end{gathered} \qquad (5.57)$$

Supongamos por ahora que son conocidos los valores iniciales de las funciones

$$p_{i0}=p_{i0}(s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_{n-1}) \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n); \qquad (5.58)$$

entonces, integrando el sistema auxiliar de ecuaciones

$$\frac{dx_1}{F_{p_1}}=\frac{dx_2}{F_{p_2}}=\ldots=\frac{dx_n}{F_{p_n}}=\frac{dz}{\sum\limits_{i=1}^{n}p_iF_{p_i}}=$$

$$=-\frac{dp_1}{F_{x_1}+p_1F_z}=\ldots=-\frac{dp_n}{F_{x_n}+p_nF_z}=dt \qquad (5.59)$$

con condiciones iniciales (5.57) y (5.58), se obtiene

$$\left.\begin{aligned} x_i&=x_i(t,\ s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_{n-1}), \\ z&=z(t,\ s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_{n-1}), \\ p_i&=p_i(t,\ s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_{n-1}), \end{aligned}\right\}\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \qquad (5.60)$$

Para $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ fijas, las ecuaciones (5.60) determinan en el espacio con coordenadas $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$ ciertas curvas, llamadas *características*. Para cada punto de éstas están determinados además los números $p_i = p_i(t, s_1, s_2, \ldots, s_{n-1})$, que determinan la dirección de ciertos planos

$$Z-z=\sum_{i=1}^{n} p_i (X_i - x_i). \qquad (5.61)$$

Las características, conjuntamente con los planos (5.61), forman las llamadas *bandas características*.

Al variar los parámetros $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ se obtiene una familia, que depende de $n-1$ parámetros, de características

$$x_i = x_i(t, s_1, \ldots, s_{n-1}), \quad z = z(t, s_1, \ldots, s_{n-1}),$$

que pasan por la superficie $(n-1)$-dimensional dada (5.57).

Demostremos que para una elección determinada de las funciones

$$p_{i0} = p_{i0}(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}) \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

los puntos pertenecientes a las características de la familia (5.60) forman la superficie integral n-dimensional buscada. Por lo tanto, hay que demostrar que para una elección determinada de las funciones $p_{i0}(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1})$, será:

1) $F(x_1(t, s_1, \ldots, s_{n-1}), \ldots, x_n(t, s_1, \ldots, s_{n-1}),$
$z(t, s_1, \ldots, s_{n-1}), p_1(t, s_1, \ldots, s_{n-1}), \ldots, p_n(t, s_1, \ldots, s_{n-1})) \equiv 0,$

2) $p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ o, lo que es lo mismo,

$$dz = \sum_{i=1}^{n} p_i \, dx_i.$$

No es difícil comprobar que la función $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n)$ es primera integral del sistema de ecuaciones (5.59). En efecto, a lo largo de las curvas integrales del sistema (5.59) es

$$\frac{d}{dt} F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) \equiv$$

$$\equiv \sum_{i=1}^{n} F_{x_i} \frac{dx_i}{dt} + F_z \frac{dz}{dt} + \sum_{i=1}^{n} F_{p_i} \frac{dp_i}{dt} \equiv$$

$$\equiv \sum_{i=1}^{n} F_{x_i} F_{p_i} + F_z \sum_{i=1}^{n} p_i F_{p_i} - \sum_{i=1}^{n} F_{p_i}(F_{x_i} + p_i F_z) \equiv 0$$

y, por lo tanto, a lo largo de dichas curvas será

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = c,$$

donde c es una constante igual a $F(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}, z_0, p_{10}, p_{20}, \ldots, p_{n0})$.

Para que las funciones (5.60) satisfagan la ecuación (5.56) a lo largo de las curvas integrales del sistema (5.59), hay que escoger los valores iniciales $p_{i0}(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1})$ de manera que

$$F(x_{10}(s_1, \ldots, s_{n-1}), \ldots, x_{n0}(s_1, \ldots, s_{n-1}), z_0(s_1, \ldots, s_{n-1}), p_{10}(s_1, \ldots, s_{n-1}), \ldots, p_{n0}(s_1, \ldots, s_{n-1})) = 0.$$

Falta comprobar que $dz = \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i$, o bien

$$\frac{\partial z}{\partial t} dt + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial z}{\partial s_j} ds_j = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} dt + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial x_i}{\partial s_j} ds_j \right).$$

Esta identidad es equivalente a las siguientes:

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{dx_i}{dt} = 0 \tag{5.62}$$

y

$$\frac{\partial z}{\partial s_j} - \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial s_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{5.63}$$

La validez de la identidad (5.62) es evidente, si se toma en cuenta que, en virtud del sistema (5.59),

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} p_i F_{p_i} \quad \text{y} \quad \frac{\partial x_i}{\partial t} = F_{p_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

(en lugar de $\frac{dz}{dt}$ y $\frac{dx_i}{dt}$ escribimos las derivadas parciales, puesto que en el sistema (5.59) todas las s_i se suponían fijas).

Para demostrar las identidadas (5.63), válidas sólo para una determinada elección de las condiciones iniciales $p_{i0}(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1})$, designemos:

$$U_j = \frac{\partial z}{\partial s_j} - \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial s_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Derivando U_j con respecto a t, se obtiene

$$\frac{\partial U_j}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial t\, \partial s_j} - \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial t\, \partial s_j} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p_i}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial s_j}. \tag{5.64}$$

Tomando en cuenta el resultado de la derivación de la identidad (5.62) con respecto a s_j,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t\,\partial s_j}-\sum_{i=1}^{n} p_i\frac{\partial^2 x_i}{\partial t\,\partial s_j}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial p_i}{\partial s_j}\frac{\partial x_i}{\partial t}\equiv 0,$$

se puede escribir la ecuación (5.64) en la forma

$$\frac{\partial U_j}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial p_i}{\partial s_j}\frac{\partial x_i}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial p_i}{\partial t}\frac{\partial x_i}{\partial s_j}.$$

Utilizando el sistema (5.59), se obtiene

$$\frac{\partial U_j}{\partial t}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial p_i}{\partial s_j}F_{p_i}+\sum_{i=1}^{n}(F_{x_i}+p_iF_z)\frac{\partial x_i}{\partial s_j}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial s_j}+\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial s_j}\right)+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s_j}-\frac{\partial F}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial s_j}-\sum_{i=1}^{n}p_i\frac{\partial x_i}{\partial s_j}\right)=$$

$$-\frac{\partial}{\partial s_j}\{F\}-F_zU_j.$$

La derivada parcial total es $\frac{\partial}{\partial s_j}\{F\}=0$, ya que $F\equiv 0$ y, por lo tanto, las funciones U_j son soluciones de las ecuaciones lineales homogéneas $\frac{\partial U_j}{\partial t}\quad -F_zU_j$ que tienen como solución única $U_j\equiv 0$, si $U_j|_{t=0}=0$. Por consiguiente, si los valores iniciales $p_{i0}(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1})$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ se toman de modo que $U_j|_{t=0}=0$, o bien $\left(\frac{\partial z}{\partial s_j}-\sum_{i=1}^{n}p_i\frac{\partial x_i}{\partial s_j}\right)_{t=0}=0$ $(j=1, 2, \ldots, n-1)$, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial s_j}-\sum_{i=1}^{n}p_i\frac{\partial x_i}{\partial s_j}\equiv 0\quad (j=1, 2, \ldots, n-1)$$

y, por lo tanto, en la superficie (5.60) será $dz=\sum_{i=1}^{n}p_i\,dx_i$, o sea, $p_i=\frac{\partial z}{\partial x_i}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$.

De este modo, para hallar la superficie integral de la ecuación $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n)=0$ que pase por la superficie $(n-1)$-dimensional

$$x_{i0}=x_{i0}(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1})\quad (i=1, 2, \ldots, n),$$
$$z_0=z_0(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}),$$

hay que determinar los valores iniciales $p_{i0}(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1})$

a partir de las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} F(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}, z_0, p_{10}, p_{20}, \ldots, p_{n0})=0, \\ \dfrac{\partial z_0}{\partial s_j}-\sum\limits_{i=1}^{n} p_{i0}\dfrac{\partial x_{i0}}{\partial s_j}=0 \quad (j=1, 2, \ldots, n-1), \end{array}\right\} \qquad (5.65)$$

después de lo cual, integrando el sistema (5.59) (pág. 278) con las condiciones iniciales:

$$\left.\begin{array}{l} x_{i0}=x_{i0}(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}), \\ z_0=z_0(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}), \\ p_{i0}=p_{i0}(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}) \end{array}\right\} \quad (i=1, 2, \ldots, n),$$

se obtiene:

$$x_i=x_i(t, s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}) \quad (i=1, 2, \ldots, n), \qquad (5.66)$$

$$z=z(t, s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}), \qquad (5.67)$$

$$p_i=p_i(t, s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}) \quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

(5.66) y (5.67) son las ecuaciones paramétricas de la superficie integral buscada.

Observación. Hemos supuesto que el sistema de ecuaciones (5.65) es resoluble con respecto a p_{i0}, y también que el sistema (5.59) satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad.

Ejemplo 1. Hallar la superficie integral de la ecuación $z=pq$ que pase por la recta $x=1$, $z=y$.

Escribamos la ecuación de la recta $x=1$, $z=y$ en forma paramétrica $x_0=1$, $y_0=s$, $z_0=s$. Determinemos $p_0(s)$ y $q_0(s)$ de las ecuaciones (5.65): $s=p_0q_0$, $1-q_0=0$, de donde $p_0=s$, $q_0=1$. Integrando el sistema (5.59) se obtiene:

$$\frac{dx}{q}=\frac{dy}{p}=\frac{dz}{2pq}=\frac{dp}{p}=\frac{dq}{q}=dt,$$

$$p=c_1e^t,\ q=c_2e^t,\ x=c_2e^t+c_3,\ y=c_1e^t+c_4,\ z=c_1c_2e^{2t}+c_5.$$

Tomando en cuenta que para $t=0$ es

$$x=1,\ y=s,\ z=s,\ p=s,\ q=1,$$

se obtiene

$$p=se^t,\ q=e^t,\ x=e^t,\ y=se^t,\ z=se^{2t}.$$

Por lo tanto, la superficie integral buscada es

$$x=e^t,\ y=se^t,\ z=se^{2t}, \text{ o bien } z=xy.$$

Ejemplo 2. Integrar la ecuación $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=2$ con la condición de que para $x=0$ sea $z=y$, o en forma paramétrica $x_0=0$, $y_0=s$, $z_0=s$.

Se determinan $p_0(s)$ y $q_0(s)$:

$$p_0^2+q_0^2=2,\ 1-q_0=0,$$

de donde $q_0=1$, $p_0=\pm 1$.

Integrando el sistema de ecuaciones (5.59):

$$\frac{dx}{2p}=\frac{dy}{2q}=\frac{dz}{4}=\frac{dp}{0}=\frac{dq}{0}=dt,$$

se obtiene

$$p=c_1,\ q=c_2,\ x=2c_1t+c_3,\ y=2c_2t+c_4,\ z=4t+c_5;$$

utilizando las condiciones iniciales $p_0=\pm 1$, $q_0=1$, $x_0=0$, $y_0=s$, $z_0=s$, se obtiene $p=\pm 1$, $q=1$, $x=\pm 2t$, $y=2t+s$, $z=4t+s$. Las tres últimas ecuaciones son las ecuaciones paramétricas de la superficie integral buscada. Eliminando los parámetros t y s, se obtiene $z=y\pm x$.

En los problemas de la mecánica con frecuencia hay que resolver el problema de Cauchy para la ecuación

$$\frac{\partial v}{\partial t}+H(t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n)=0, \tag{5.68}$$

donde $p_i=\frac{\partial v}{\partial x_i}$, que es un caso particular de la ecuación (5.56) (pág. 278). El método de Cauchy—que aplicado a la ecuación (5.68) es llamado comúnmente *primer método de Jacobi*—nos conduce al sistema de ecuaciones

$$dt=\frac{dx_1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}}=\frac{dx_2}{\frac{\partial H}{\partial p_2}}=\ldots=\frac{dx_n}{\frac{\partial H}{\partial p_n}}=-\frac{dp_1}{\frac{\partial H}{\partial x_1}}=$$

$$=-\frac{dp_2}{\frac{\partial H}{\partial x_2}}=\ldots=-\frac{dp_n}{\frac{\partial H}{\partial x_n}}=\frac{dv}{\sum_{i=1}^{n}p_i\frac{\partial H}{\partial p_i}+\frac{\partial v}{\partial t}},$$

de donde

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\ \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_i}\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{5.69}$$

y

$$\frac{dv}{dt}=\sum_{i=1}^{n}p_i\frac{\partial H}{\partial p_i}+\frac{\partial v}{\partial t},$$

o bien

$$\frac{dv}{dt}=\sum_{i=1}^{n}p_i\frac{\partial H}{\partial p_i}-H. \tag{5.70}$$

El sistema de $2n$ ecuaciones (5.69) no contiene v y puede integrarse independientemente de la ecuación (5.70). Después de esto, de la ecuación (5.70) la función v se halla por cuadratura. En esto consiste la peculiaridad de la aplicación del método de Cauchy a la ecuación (5.68). Además, en el caso considerado no hay necesidad de introducir un parámetro auxiliar en el sistema (5.50), pues este papel lo puede desempeñar con éxito la variable independiente t.

EJERCICIOS DEL CAPITULO 5

1. $\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=0.$

2. $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=2z.$

3. $x\dfrac{\partial z}{\partial y}=z.$

4. $z\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0.$

5. $y\dfrac{\partial z}{\partial x}=z$ para $x=2,\ z=y.$

6. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$ para $y=1,\ z=3x.$

7. $yz\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ para $x=0,\ z=y^3.$

8. Hallar las superficies ortogonales a las superficies de la familia $z=axy.$

9. Hallar las superficies ortogonales a las superficies de la familia $xyz=a.$

10. $\dfrac{x}{3}\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{y}{5}\dfrac{\partial z}{\partial y}=z-5.$

11. $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=0.$

12. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+2y\dfrac{\partial u}{\partial y}+3z\dfrac{\partial u}{\partial z}=4u.$

13. $\dfrac{\partial^2 z(x,\ y)}{\partial x^2}=0.$

14. $\dfrac{\partial z}{\partial x}-2x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ para $x=1,\ z=y^2.$

15. ¿Es integrable la ecuación

$$(y^2+z^2-x^2)\,dx+xz\,dy+xy\,dz=0$$

mediante una sola relación?

16. Integrar mediante una sola relación la ecuación

$$(y+3z^2)\,dx+(x+y)\,dy+6xz\,dz=0.$$

17. Hallar la integral completa de la ecuación

$$pq=x^2y^2.$$

18. Hallar la integral completa de la ecuación

$$z=px+qy+p^3q^3.$$

19. Hallar la integral completa de la ecuación

$$pq=9z^2.$$

20. Hallar la integral completa de la ecuación

$$p=\operatorname{sen} q.$$

21. Hallar las superficies ortogonales a las líneas vectoriales del campo vectorial

$$\boldsymbol{F}=(2xy-3yz)\,\boldsymbol{i}+(x^2-3xz)\,\boldsymbol{j}-2xy\,\boldsymbol{k}.$$

22. Hallar la familia de superficies ortogonales a las líneas vectoriales del campo vectorial

$$\boldsymbol{F}=(2x-y)\,\boldsymbol{i}+(3y-z)\,\boldsymbol{j}+(x-2y)\,\boldsymbol{k}.$$

23. Hallar las líneas vectoriales, las superficies vectoriales y las superficies ortogonales a las líneas vectoriales del campo

$$\boldsymbol{F}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}-z\boldsymbol{k}.$$

24. $z=pq+1$ para $y=2,\ z=2x+1.$

25. $2z=pq-3xy$ para $x=5,\ z=15y.$

26. $4z=p^2+q^2$ para $x=0,\ z=y^2.$

Parte II

Cálculo variacional

Introducción

Conjuntamente con los problemas en que es necesario determinar los máximos y mínimos de cierta función $z=f(x)$, con frecuencia surge en los problemas físicos la necesidad de hallar los valores máximos o mínimos de un género especial de magnitudes, llamadas funcionales.

Se llaman *funcionales* a las magnitudes variables cuyos valores se determinan mediante la elección de una o de varias funciones.

Por ejemplo, la longitud l del arco de una curva plana (o alabeada) que une dos puntos dados $A(x_0, y_0)$ y $B(x_1, y_1)$, es una funcional (véase la fig. A). La magnitud l puede calcularse si se da la ecuación de la curva, $y=y(x)$; entonces

$$l[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+(y')^2}\,dx.$$

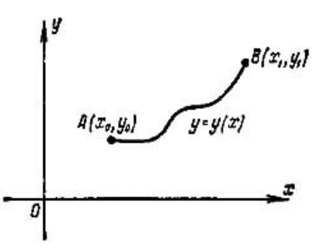


Fig. A.

El área S de cierta superficie es también una funcional, puesto que se determina escogiendo la superficie, es decir, escogiendo la función $z(x, y)$ que figura en la ecuación $z=z(x, y)$ de la superficie. Como es sabido,

$$S[z(x, y)]=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy,$$

donde D es la proyección de la superficie en el plano Oxy.

Los momentos de inercia, los momentos estáticos, las coordenadas del centro de gravedad de cierta curva o superficie homogénea, son también funcionales, puesto que sus valores se determinan eligiendo la curva o la superficie, es decir, las funciones contenidas en la ecuación de dicha curva o superficie.

En todos estos ejemplos se tiene una dependencia que es característica para las funcionales: a una función (escalar o vectorial) le corresponde un número, mientras que al dar una función $z = f(x)$ a un número le correspondía otro número.

El *cálculo variacional* estudia los métodos que permiten hallar los valores máximos y mínimos de los funcionales. Los problemas en que se exige investigar el máximo o el mínimo de una funcional, se denominan *problemas variacionales*.

Muchas leyes de la mecánica y la física se reducen a la afirmación de que cierta funcional debe alcanzar su mínimo o su máximo en el proceso considerado. En este enunciado, dichas leyes reciben el nombre de *principios variacionales* de la mecánica o de la física. A dichos principios variacionales, o a sus corolarios más simples, pertenecen: el principio de la acción mínima, la ley de conservación de la energía, la ley de conservación del impulso, la ley de conservación de la cantidad de movimiento, la ley de conservación del momento de la cantidad de movimiento, diferentes principios variacionales de la teoría clásica y de la teoría relativista del campo, el principio de Fermat en óptica, el principio de Castiglianos en la teoría de la elasticidad, etc.

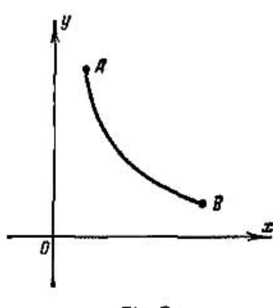


Fig. B.

El cálculo variacional comenzó a desarrollarse en 1696, llegando a ser una disciplina matemática independiente con métodos propios de investigación después de los trabajos fundamentales del miembro activo de la Academia de Ciencias de San Petersburgo L. Euler (1707—1783), quien puede considerarse con pleno derecho el fundador del cálculo variacional.

Los tres problemas siguientes ejercieron gran influencia en el desarrollo del cálculo variacional:

P r o b l e m a d e l a b r a q u i s t ó c r o n a. En 1696 Iohanis Bernoulli publicó una carta en la que propuso el problema sobre las líneas de deslizamiento más rápido, o *braquistócronas*, a la atención de los matemáticos. En este problema se exige determinar la línea que une dos puntos dados A y B, que no pertenecen a una misma recta vertical, que posea la propiedad de que un punto material se deslice por dicha línea desde el punto A hasta el B en el menor tiempo posible (fig. B).

Es fácil ver que la línea de deslizamiento más rápido no será la recta que une los puntos A y B, a pesar de que ésta sea la distancia más corta entre dichos puntos, ya que al moverse por esta recta la velocidad aumentará en forma relativamente lenta; si, en cambio, se toma una curva que baje más bruscamente cerca del punto A, entonces, aunque el camino se alarga, gran parte del mismo será recorrido con mayor velocidad. La solución del problema de la braquistócrona fue dada por I. Bernoulli, J. Bernoulli, G. Leibnitz, I. Newton y G. L'Hôpital. La línea de deslizamiento más rápido resultó ser la cicloide (véanse las págs. 311—312).

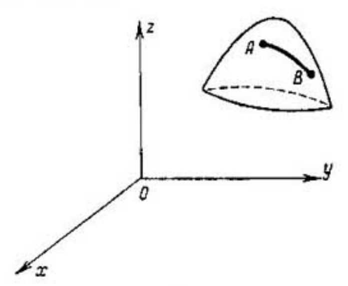


Fig. C.

Problema de las líneas geodésicas. Se pide determinar la línea de menor longitud que una dos puntos dados en cierta superficie $\varphi(x, y, z)=0$ (fig. C). Estas líneas son llamadas líneas *geodésicas*. Se tiene aquí un problema variacional típico sobre el llamado *extremo fijo* o *condicional*. Se pide hallar el mínimo de la funcional

$$l=\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx,$$

y además las funciones $y(x)$ y $z(x)$ deben someterse a la condición $\varphi(x, y, z)=0$. Este problema fue resuelto en 1698 por J. Bernoulli, pero el método general para resolver problemas de este tipo fue dado recién los trabajos de L. Euler y J. Lagrange.

Problema isoperimétrico. Se pide hallar una línea cerrada de longitud dada l que delimite el área máxima S. Esta línea, como se sabía ya en la Grecia antigua, es la circunferencia En este problema se exige hallar el extremo de la funcional S con una condición complementaria peculiar: la longitud de la curva debe ser constante, es decir, la funcional

$$l=\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}\,dt$$

se mantiene constante. Condiciones de este tipo se llaman isoperimétricas. Los métodos generales de resolución de problemas con condiciones isoperimétricas fueron desarrollados por L. Euler.

Más adelante se exponen los métodos de resolución de diferentes problemas variacionales, investigándose sobre todo los extremos de las siguientes funcionales, que se encuentran con frecuencia en las aplicaciones:

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x,\ y(x),\ y'(x))\,dx,$$

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x,\ y(x),\ y'(x),\ \ldots,\ y^{(n)}(x))\,dx,$$

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x,\ y_1(x),\ \ldots,\ y_n(x),\ y_1'(x),\ \ldots,\ y_n'(x))\,dx,$$

$$\iint_D F\left(x,\ y,\ z(x,\ y),\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)dx\,dy,$$

en las cuales las funciones F están dadas, y las funciones $y(x)$, $y_1(x)$, $\ldots$, $y_n(x)$, $z(x,\ y)$ son los argumentos de las funcionales.

CAPITULO 6

Método de las variaciones en problemas con fronteras fijas

§ 1. LA VARIACION Y SUS PROPIEDADES

Los métodos de resolución de problemas variacionales, es decir, problemas sobre la investigación de los máximos y mínimos de las funcionales, se asemejan mucho a los métodos de investigación de los máximos y mínimos de las funciones. Por esto es conveniente recordar brevemente la teoría del máximo y el mínimo de las funciones, e introducir en forma paralela conceptos análogos y demostrar teoremas semejantes para las funcionales.

1. La variable z se llama *función* de la variable x, lo cual se designa así: $z=f(x)$, si a cada valor de x de cierta región de variación de x le corresponde un valor de z, es decir, tiene lugar la correspondencia: al número x le corresponde el número z.

Análogamente se definen también las funciones de varias variables.

1. La variable v se llama *funcional* dependiente de la función $y(x)$, lo cual se designa así: $v=v[y(x)]$, si a cada función $y(x)$ de cierta clase de funciones $y(x)$ le corresponde un valor v, es decir, tiene lugar la correspondencia: a la función $y(x)$ le corresponde el número v.

Análogamente se definen también las funcionales dependientes de varias funciones, y las funcionales dependientes de funciones de varias variables.

2. Se llama *incremento* Δx del argumento x de la función $f(x)$ a la diferencia entre dos valores de esta variable: $\Delta x=x-x_1$. Si x es la variable independiente, la diferencial de x coincide con su incremento, $dx=\Delta x$.

2. Se llama *incremento* o *variación* δy del argumento $y(x)$ de la funcional $v[y(x)]$ a la diferencia entre dos funciones: $\delta y=y(x)-y_1(x)$. Aquí se supone que $y(x)$ varía arbitrariamente en cierta clase de funciones.

3. La función $f(x)$ se llama *continua*, si a una pequeña variación de x le corresponde una pequeña variación de la función $f(x)$.

3. La funcional $v[y(x)]$ se llama *continua*, si a una pequeña variación de $y(x)$ le corresponde una pequeña variación de ésta.

La última definición debe ser precisada y aclarada, puesto que de inmediato surge la pregunta: ¿qué variaciones de la función $y(x)$, que es el argumento de la funcional, se denominan pequeñas? o, lo que es lo mismo, ¿qué curvas $y=y(x)$ e $y=y_1(x)$ se consideran poco diferentes o cercanas?

Las funciones $y(x)$ e $y_1(x)$ se pueden considerar cercanas en el caso de que el módulo de su diferencia $y(x)-y_1(x)$ sea pequeño para todos los valores de x para los cuales se dan las funciones $y(x)$ e $y_1(x)$, es decir, considerar curvas cercanas a aquéllas cuyas ordenadas sean próximas.

Sin embargo, bajo esta definición de proximidad de las curvas, las funcionales de la forma

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1} F(x,\ y,\ y')\,dx,$$

que se encuentran a menudo en las aplicaciones, serán continuas sólo en casos excepcionales, debido a que la función subintegral contiene al argumento y'. Por eso, en muchos casos es más natural considerar cercanas sólo las curvas cuyas ordenadas y cuyas direcciones de las tangentes en los puntos correspondientes sean próximas, o sea, exigir que para las curvas cercanas sea pequeño no sólo el módulo de la diferencia $y(x)-y_1(x)$, sino también el de la diferencia $y'(x)-y_1'(x)$.

A veces también es necesario considerar cercanas sólo a las funciones para las que sea pequeño el módulo de cada diferencia:

$$y(x)-y_1(x),\quad y'(x)-y_1'(x),$$
$$y''(x)-y_1''(x),\ \ldots,\ y^{(k)}(x)-y_1^{(k)}(x).$$

Por esto se hace necesario introducir las siguientes definiciones de proximidad de las curvas $y=y(x)$ e $y=y_1(x)$.

Las curvas $y=y(x)$ e $y=y_1(x)$ son cercanas, en el sentido de proximidad de orden nulo, si el módulo de la diferencia $y(x)-y_1(x)$ es pequeño.

Las curvas $y=y(x)$ e $y=y_1(x)$ son cercanas, en el sentido de proximidad de primer orden, si los módulos de las diferencias $y(x)-y_1(x)$ e $y'(x)-y_1'(x)$ son pequeños.

Las curvas

$$y=y(x)\quad e\quad y=y_1(x)$$

son cercanas, en el sentido de proximidad de k-ésimo orden, si los módulos de las diferencias

$$y(x)-y_1(x),$$
$$y'(x)-y_1'(x),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$y^{(k)}(x)-y_1^{(k)}(x)$$

son pequeños.

En la fig. 6.1 se representan curvas cercanas en el sentido de proximidad de orden nulo que no lo son en el sentido de proximidad de primer orden, puesto que sus coordenadas son próximas,

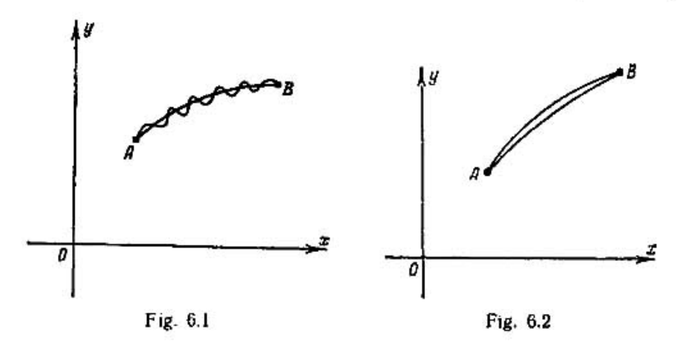


Fig. 6.1 Fig. 6.2

y no lo es la dirección de las tangentes. En la fig. 6.2 están representadas curvas cercanas en el sentido de proximidad de primer orden.

De estas definiciones se deduce que si las curvas son cercanas en el sentido de proximidad de k-ésimo orden, entonces con mayor razón lo serán en el sentido de proximidad de cualquier orden menor.

Ahora podemos precisar el concepto de continuidad de una funcional.

3'. La función $f(x)$ es *continua* para $x=x_0$, si para todo ε positivo existe un $\delta>0$ tal que $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ cuando $|x-x_0|<\delta$.

3'. La funcional $v[y(x)]$ es *continua* para $y=y_0(x)$ en el sentido de proximidad de k-ésimo orden, si para todo ε positivo existe un $\delta>0$ tal que

Aquí se sobreentiende que x toma valores para los cuales la función $f(x)$ está definida.

$$|v[y(x)]-v[y_0(x)]|<\varepsilon$$

para

$$|y(x)-y_0(x)|<\delta,$$
$$|y'(x)-y_0'(x)|<\delta,$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots$$
$$|y^{(k)}(x)-y_0^{(k)}(x)|<\delta.$$

Aquí se sobreentiende que la función $y(x)$ se toma de la clase de funciones en la cual la funcional $v[y(x)]$ está definida.

Se hubiera podido definir el concepto de distancia $\rho(y_1, y_2)$ entre las curvas $y=y_1(x)$ e $y=y_2(x)$ $(x_0 \leqslant x \leqslant x_1)$ y considerar entonces curvas cercanas a las curvas cuya distancia sea pequeña.

Si se considera que

$$\rho(y_1, y_2)=\max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_1} |y_1(x)-y_2(x)|,$$

o sea, si se introduce la métrica del espacio C_0 (véase la pág. 52), se llega al concepto de proximidad de orden nulo. Si consideramos que

$$\rho(y_1, y_2)=\sum_{p=1}^{k} \max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_1} |y_1^{(p)}(x)-y_2^{(p)}(x)|$$

(se supone que y_1 e y_2 tienen derivadas continuas hasta de k-ésimo orden inclusive), la proximidad de las curvas es de k-ésimo orden.

4. Se llama *función lineal* a la función $l(x)$ que satisface las siguientes condiciones:

$$l(cx)=cl(x),$$

donde c es una constante arbitraria, y

$$l(x_1+x_2)=l(x_1)+l(x_2).$$

La función lineal de una variable tiene la forma

$$l(x)=kx,$$

donde k es una constante.

4. Se *llama funcional lineal* a la funcional $L[y(x)]$ que satisface las siguientes condiciones:

$$L[cy(x)]=cL[y(x)],$$

donde c es una constante arbitraria, y

$$L[y_1(x)+y_2(x)]=$$
$$=L[y_1(x)]+L[y_2(x)].$$

Un ejemplo de funcional lineal es

$$L[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}(p(x)y+q(x)y')\,dx.$$

5. Si el incremento de la función

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$$

puede representarse en la forma

$$\Delta f = A(x)\Delta x + \beta(x, \Delta x)\cdot\Delta x,$$

donde $A(x)$ no depende de Δx y $\beta(x, \Delta x) \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$, entonces la función se llama *derivable*, y la parte $A(x)\Delta x$ del incremento, lineal con respecto a Δx, se llama *diferencial* de la función y se denota por df. Dividiendo entre Δx y pasando al límite para $\Delta x \to 0$, se obtiene que $A(x) = f'(x)$ y, por lo tanto,

$$df = f'(x)\Delta x.$$

5. Si el incremento de la funcional

$$\Delta v = v[y(x) + \delta y] - v[y(x)]$$

puede representarse en la forma

$$\Delta v = L[y(x), \delta y] + \beta(y(x), \delta y)\max|\delta y|,$$

donde $L[y(x), \delta y]$ es una funcional lineal con respecto a δy, $\max|\delta y|$ es el valor máximo de $|\delta y|$ y $\beta(y(x), \delta y) \to 0$ cuando $\max|\delta y| \to 0$, entonces la parte del incremento lineal con respecto a δy, es decir, $L[y(x), \delta y]$, se llama *variación de la funcional* y se designa por δv.

De este modo, la *variación de la funcional es la parte principal del incremento, lineal con respecto a* δy.

Al investigar las funcionales la variación juega el mismo papel que la diferencial en el estudio de las funciones.

Se puede dar también otra definición casi equivalente de diferencial de una función y de variación de una funcional. Consideremos el valor de la función $f(x+\alpha\Delta x)$ para x y Δx fijos y para valores variables del parámetro α. Para $\alpha = 1$, se obtiene el valor incrementado $f(x+\Delta x)$ de la función; para $\alpha = 0$, se tendrá el valor original $f(x)$ de ésta. No es difícil comprobar que la derivada de $f(x+\alpha\Delta x)$ con respecto a α es igual, para $\alpha = 0$, a la diferencial de la función $f(x)$ en el punto x. En efecto, según la regla de derivación de una función compuesta,

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} f(x+\alpha\Delta x)\Big|_{\alpha=0} = f'(x+\alpha\Delta x)\Delta x\Big|_{\alpha=0} = f'(x)\Delta x = df(x).$$

En forma completamente análoga, para la función de varias variables

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

se puede obtener la diferencial derivando

$$f(x_1+\alpha\Delta x_1, x_2+\alpha\Delta x_2, \ldots, x_n+\alpha\Delta x_n)$$

con respecto a α, y haciendo después $\alpha = 0$. En efecto,

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} f(x_1+\alpha\Delta x_1, x_2+\alpha\Delta x_2, \ldots, x_n+\alpha\Delta x_n)\Big|_{\alpha=0} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i = df.$$

Para las funcionales de forma $v[y(x)]$ o más complejas, dependientes de varias funciones o de funciones de varias variables también se puede definir la variación como la derivada de la funcional $v[y(x)+\alpha\delta y]$ con respecto a α, para $\alpha=0$. En efecto, si la funcional posee variación en el sentido de parte lineal principal del incremento, entonces éste tiene la forma

$$\Delta v = v[y(x)+\alpha\delta y]-v[y(x)] = L(y,\ \alpha\delta y)+\beta(y,\ \alpha\delta y)|\alpha|\max|\delta y|.$$

La derivada de $v[y+\alpha\delta y]$ con respecto a α es igual, para $\alpha=0$, a

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\Delta v}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{L(y,\ \alpha\delta y)+\beta[y(x),\ \alpha\delta y]|\alpha|\max|\delta y|}{\alpha}=$$
$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{L(y,\ \alpha\delta y)}{\alpha}+\lim_{\alpha\to 0}\frac{\beta[y(x),\ \alpha\delta y]|\alpha|\max|\delta y|}{\alpha}=L(y,\ \delta y),$$

puesto que, en virtud de la linealidad,

$$L(y,\ \alpha\delta y)=\alpha L(y,\ \delta y),$$

y

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\beta[y(x),\ \alpha\delta y]|\alpha|\max|\delta y|}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\beta[y(x),\ \alpha\delta y]\max|\delta y|=0,$$

debido a que $\beta[y(x),\ \alpha\delta y]\to 0$ para $\alpha\to 0$. De esta manera, si existe variación en el sentido antedicho, existirá también variación en el sentido de derivada con respecto al parámetro para el valor inicial del mismo, y ambas definiciones son equivalentes.

La segunda definición es un poco más amplia que la primera, puesto que existen ejemplos de funcionales de cuyo incremento no se puede extraer la parte lineal principal, pero existe la variación en el sentido de la segunda definición.

6. La *diferencial* de la función $f(x)$ es igual a

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}f(x+\alpha\Delta x)|_{\alpha=0}.$$

6. La *variación* de la funcional $v[y(x)]$ es igual a

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}v[y(x)+\alpha\delta y]|_{\alpha=0}.$$

Definición. *La funcional $v[y(x)]$ tiene un máximo en la curva $y=y_0(x)$, si su valor en cualquier curva próxima a $y=y_0(x)$ no es mayor que $v[y_0(x)]$, es decir,* $\Delta v=v[y(x)]-v[y_0(x)]\leqslant 0$.

Si $\Delta v\leqslant 0$ y además $\Delta v=0$ sólo cuando $y(x)=y_0(x)$, entonces se dice que en la curva $y=y_0(x)$ se tiene un *máximo estricto*. Análogamente se define la curva $y=y_0(x)$ en la que hay un *mínimo*. En este caso $\Delta v\geqslant 0$ para todas las curvas cercanas a la curva $y=y_0(x)$.

7. **Teorema.** *Si la función derivable $f(x)$ alcanza su máximo o su mínimo en un punto interior $x=x_0$ de la región de definición de la función, entonces en este punto será*

$$df=0.$$

7. **Teorema.** *Si la funcional $v[y(x)]$, que posee variación, alcanza su máximo o su mínimo para $y=y_0(x)$, siendo $y_0(x)$ un punto interior de la región de definición de la funcional, entonces para $y=y_0(x)$ será*

$$\delta v=0.$$

Demostración del teorema para las funcionales. Para $y_0(x)$ y δy fijos, $v[y_0(x)+\alpha\delta y]=\varphi(\alpha)$ es una función de α, la cual, por hipótesis, tiene en $\alpha=0$ un máximo o un mínimo; por consiguiente, la derivada

$$\varphi'(0)=0^{*}), \text{ o bien } \frac{\partial}{\partial\alpha}v[y_0(x)+\alpha\delta y]\big|_{\alpha=0}=0,$$

o sea, $\delta v=0$. De este modo, en las curvas en las que la funcional tiene un extremo, su variación es igual a cero.

El concepto de *extremo* de una funcional debe ser precisado. Al hablar del máximo o del mínimo, más exactamente, del máximo o del mínimo relativos, tuvimos en cuenta el mayor o el menor valor de la funcional sólo con respecto a los valores de ésta en las curvas cercanas. Pero, como fue indicado anteriormente, la proximidad de las curvas puede entenderse de diferentes maneras. Por esto, en la definición de máximo o de mínimo hay que señalar qué orden de proximidad se tiene en cuenta.

Si la funcional $v[y(x)]$ alcanza su máximo o su mínimo en la curva $y=y_0(x)$ con respecto a todas las curvas para las cuales el módulo de la diferencia $y(x)-y_0(x)$ es pequeño, es decir, con respecto a las curvas cercanas a $y=y_0(x)$ en el sentido de proximidad de orden nulo, entonces el máximo o el mínimo se llama *fuerte*.

Si, en cambio, la funcional $v[y(x)]$ alcanza su máximo o su mínimo en la curva $y=y_0(x)$ sólo con respecto a las curvas $y=y(x)$ cercanas a $y=y_0(x)$ en el sentido de proximidad de primer orden, a sea cercanas a $y=y_0(x)$ no sólo por sus ordenadas, sino también por las direcciones de sus tangentes, el máximo o el mínimo se denomina *débil*.

Es evidente que si en la curva $y=y_0(x)$ se tiene un máximo (o mínimo) fuerte, entonces se tiene también uno débil, puesto que si la curva es cercana a $y=y_0(x)$ en el sentido de proximidad de primer orden, lo será también en el sentido de proximidad de

*) α puede tomar tanto valores positivos como negativos en un entorno del punto $\alpha=0$, puesto que $y_0(x)$ es un punto interior de la región de definición de la funcional.

orden nulo. Sin embargo, es posible que en la curva $y=y_0(x)$ se alcance un máximo (mínimo) débil y al mismo tiempo no se alcance un máximo (mínimo) fuerte, o sea, que entre las curvas $y=y(x)$ cercanas a $y=y_0(x)$, tanto por sus ordenadas como por la dirección de sus tangentes, pueden no haber curvas para las cuales $v[y(x)] \geqslant v[y_0(x)]$ (en el caso de mínimo, $v[y(x)] \leqslant v[y_0(x)]$, y entre las curvas $y=y(x)$ cercanas sólo por sus ordenadas, pero ya no próximas por la dirección de sus tangentes, se pueden encontrar curvas para las cuales $v[y(x)] \geqslant v[y_0(x)]$ (en el caso de mínimo, $v[y(x)] \leqslant v[y_0(x)]$). La diferencia entre un extremo fuerte y uno débil no tendrá un significado sustancial para la deducción de la condición necesaria fundamental de extremo, pero ésta será muy importante en el capítulo 8, al estudiar las condiciones suficientes de extremo.

Obsérvese, además, que si en la curva $y=y_0(x)$ se tiene un extremo, entonces no sólo $\frac{\partial}{\partial\alpha} v[y_0(x)+\alpha\delta y]|_{\alpha=0}=0$, sino también $\frac{\partial}{\partial\alpha} v[y(x, \alpha)]|_{\alpha=0}=0$, donde $y(x, \alpha)$ es una familia cualquiera de curvas admisibles; además, para $\alpha=0$ y para $\alpha=1$ la función $y(x, \alpha)$ debe transformarse respectivamente en $y_0(x)$ e $y_0(x)+\delta y$. En efecto, $v[y(x, \alpha)]$ es función de α, ya que al dar α se determina una curva de la familia $y=y(x, \alpha)$, por lo que se determina también el valor de la funcional $v[y(x, \alpha)]$.

Esta función, por hipótesis, alcanza su extremo cuando $\alpha=0$; por lo tanto, su derivada se anula para $\alpha=0$*).

De este modo, $\frac{\partial}{\partial\alpha} v[y(x, \alpha)]|_{\alpha=0}=0$; sin embargo, esta derivada, en general, ya no coincidirá con la variación de la funcional, pero se anulará—como acabamos de ver—simultáneamente con δv en las curvas que realizan el extremo de la funcional.

Todas las definiciones de este parágrafo y el teorema fundamental (pág. 297) se generalizan, casi sin modificaciones, a las funcionales dependientes de varias funciones desconocidas

$$v[y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)],$$

o dependientes de una o de algunas funciones de varias variables

$$v[z(x_1, x_2, \ldots, x_n)],$$

$$v[z_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), z_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, z_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)].$$

Por ejemplo, la variación δv de la funcional $v[z(x, y)]$ puede definirse como la parte lineal principal con respecto a δz del

*) Se presupone que α puede tomar valores cualesquiera cercanos a $\alpha=0$, y que existe $\left.\frac{\partial v[y(x, \alpha)]}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}$.

incremento

$$\Delta v = v[z(x, y) + \delta z] - v[z(x, y)],$$

o como la derivada respecto al parámetro en el valor inicial del mismo

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} v[z(x, y) + \alpha \delta z]|_{\alpha=0};$$

además, si para $z = z(x, y)$ la funcional v tiene un extremo, entonces para esta z la variación $\delta v = 0$, puesto que $v[z(x, y) + \alpha \delta z]$ es una función de α que tiene, por hipótesis, un extremo en $\alpha = 0$. En consecuencia, la derivada de esta función con respecto a α se anula para $\alpha = 0$, $\frac{\partial}{\partial \alpha} v[z(x, y) + \alpha \delta z]|_{\alpha=0} = 0$, o bien $\delta v = 0$.

§ 2. ECUACION DE EULER

Analicemos el extremo de la funcional

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))\,dx, \tag{6.1}$$

si los puntos frontera de las curvas admisibles están fijos: $y(x_0) = y_0$ e $y(x_1) = y_1$ (fig. 6.3). La función $F(x, y, y')$ se considerará derivable tres veces.

Ya sabemos que la condición necesaria para que haya un extremo es la anulación de la variación de la funcional. Mostremos ahora cómo se aplica este teorema fundamental a la funcional considerada; además, repetiremos el razonamiento anterior aplicado a la funcional (6.1). Supongamos que en la curva $y = y(x)$, derivable dos veces, se tiene un extremo (exigiendo sólo la existencia de derivadas de primer orden de las curvas admisibles, se puede demostrar por otro método que la curva, que realiza el extremo, posee también derivada segunda).

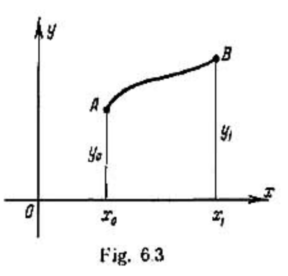


Fig. 6.3

Tomemos cierta curva admisible $y = \bar{y}(x)$ cercana a $y = y(x)$ e incluyamos $y = y(x)$ e $y = \bar{y}(x)$ en la familia monoparamétrica de curvas

$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha(\bar{y}(x) - y(x));$$

cuando $\alpha = 0$, se obtiene la curva $y = y(x)$; para $\alpha = 1$, se tiene

$y=\bar{y}(x)$ (fig. 6.4). Como ya es sabido, la diferencia $\bar{y}(x)-y(x)$ se llama variación de la función $y(x)$ y se designa por δy.

En los problemas variacionales la variación δy desempeña un papel análogo al del incremento de la variable independiente Δx en los problemas del estudio de los extremos de una función $f(x)$. La variación $\delta y=\bar{y}(x)-y(x)$ es una función de x. Esta función se puede derivar una o varias veces, siendo $(\delta y)'=\bar{y}'(x)-y'(x)=\delta y'$, es decir, la derivada de la variación es igual a la variación de la derivada; análogamente

$$(\delta y)''=\bar{y}''(x)-y''(x)=\delta y'',$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(\delta y)^{(k)}=\bar{y}^{(k)}(x)-y^{(k)}(x)=\delta y^{(k)}.$$

De este modo, consideremos la familia $y=y(x, \alpha)$, donde $y(x, \alpha)=y(x)+\alpha\delta y$, que contiene, para $\alpha=0$, la curva en la cual se alcanza el extremo, y para $\alpha=1$, cierta curva admisible cercana, llamada curva de comparación.

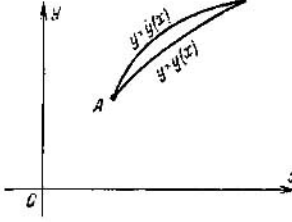


Fig. 6.4

Si consideramos los valores de la funcional

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$$

sólo en las curvas de la familia $y=y(x, \alpha)$, la funcional se transforma en una función de α:

$$v[y(x, \alpha)]=\varphi(\alpha),$$

ya que el valor del parámetro α determina una curva de la familia $y=y(x, \alpha)$, determinando también con esto el valor de la funcional $v[y(x, \alpha)]$. Esta función $\varphi(\alpha)$ tiene un extremo en $\alpha=0$, puesto que para dicho valor se obtiene $y=y(x)$, teniendo la funcional, por hipótesis, un extremo con respecto a cualquier curva cercana admisible y, en particular, con respecto a las curvas cercanas de la familia $y=y(x, \alpha)$. La condición necesaria para que la función $\varphi(\alpha)$ tenga un extremo en $\alpha=0$, como es sabido, es la anulación de su derivada para $\alpha=0$:

$$\varphi'(0)=0.$$

Como

$$\varphi(\alpha)=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x, \alpha), y'_x(x, \alpha))\,dx,$$

entonces

$$\varphi'(\alpha)=\int_{x_0}^{x_1}\left[F_y\frac{\partial}{\partial\alpha}y(x,\alpha)+F_{y'}\frac{\partial}{\partial\alpha}y'(x,\alpha)\right]dx,$$

donde

$$F_y=\frac{\partial}{\partial y}F(x,\ y(x,\ \alpha),\ y'(x,\ \alpha)),$$
$$F_{y'}=\frac{\partial}{\partial y'}F(x,\ y(x,\ \alpha),\ y'(x,\ \alpha)),$$

o, puesto que

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}y(x,\ \alpha)=\frac{\partial}{\partial\alpha}[y(x)+\alpha\delta y]=\delta y$$

y

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}y'(x,\ \alpha)=\frac{\partial}{\partial\alpha}[y'(x)+\alpha\delta y']=\delta y',$$

se obtiene

$$\varphi'(\alpha)=\int_{x_0}^{x_1}[F_y(x,\ y(x,\ \alpha),\ y'(x,\ \alpha))\,\delta y+$$
$$+F_{y'}(x,\ y(x,\ \alpha),\ y'(x,\ \alpha))\,\delta y']\,dx;$$
$$\varphi'(0)=\int_{x_0}^{x_1}[F_y(x,\ y(x),\ y'(x))\,\delta y+F_{y'}(x,\ y(x),\ y'(x))\,\delta y']\,dx.$$

Como ya hemos visto, $\varphi'(0)$ se llama variación de la funcional, y se designa por δv. La condición necesaria para que la funcional v tenga un extremo, consiste en la anulación de su variación: $\delta v=0$. Para la funcional

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,\ y,\ y')\,dx$$

esta condición tiene la forma

$$\int_{x_0}^{x_1}[F_y\,\delta y+F_{y'}\delta y']\,dx=0.$$

Integrando el segundo sumando por partes, y tomando en cuenta que $\delta y'=(\delta y)'$, obtenemos

$$\delta v=[F_{y'}\delta y]_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y\,dx.$$

Pero

$$\delta y\,|_{x=x_0}=\bar{y}(x_0)-y(x_0)=0 \quad \text{y} \quad \delta y\,|_{x=x_1}=\bar{y}(x_1)-y(x_1)=0,$$

en virtud de que todas las curvas admisibles en el problema simple considerado pasan por puntos frontera fijos y, por lo tanto,

$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y dx.$$

De este modo, la condición necesaria de extremo toma la forma

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y \, dx = 0, \tag{6.2}$$

donde el primer factor $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}$ es una función continua dada en la curva $y = y(x)$ que realiza el extremo, y el segundo factor δy, debido a la arbitrariedad en la elección de la curva de comparación $y = y(x)$, es una función arbitraria que satisface sólo ciertas condiciones muy generales, más exactamente: la función δy se anula en los puntos frontera $x = x_0$ y $x = x_1$, es continua y derivable una o varias veces, δy o bien δy y $\delta y'$ son pequeños en valor absoluto.

Para simplificar la condición (6.2) obtenida, aplicaremos el siguiente lema:

Lema fundamental del cálculo variacional. *Si para cada función continua* $\eta(x)$ *se tiene*

$$\int_{x_0}^{x_1} \Phi(x)\, \eta(x) dx = 0,$$

siendo $\Phi(x)$ *una función continua en el segmento* $[x_0, x_1]$, *entonces*

$$\Phi(x) \equiv 0$$

en dicho segmento.

Observación. La afirmación del lema y su demostración no varían si a la función $\eta(x)$ se le imponen las siguientes limitaciones: $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$; $\eta(x)$ tiene derivadas continuas hasta de orden p, $|\eta^{(s)}(x)| < \varepsilon$ $(s = 0, 1, \ldots, q;\ q \leqslant p)$.

Demostración. Suponiendo que en el punto $x = \bar{x}$ contenido en el segmento $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, sea $\Phi(\bar{x}) \neq 0$, se llega a una contradicción. En efecto, de la continuidad de la función $\Phi(x)$ se deduce que si $\Phi(\bar{x}) \neq 0$, entonces $\Phi(x)$ conserva su signo en cierto entorno $(\bar{x}_0 \leqslant \leqslant x \leqslant \bar{x}_1)$ del punto $\bar{x}$. Pero entonces, tomando una función $\eta(x)$ que también conserve su signo en este entorno y sea igual a cero fuera del mismo (fig. 6.5), se obtiene

$$\int_{x_0}^{x_1} \Phi(x)\, \eta(x) dx = \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_1} \Phi(x)\, \eta(x)\, dx \neq 0,$$

ya que el producto $\Phi(x)\eta(x)$ conserva su signo en el segmento $(\bar{x}_0 \leqslant x \leqslant \bar{x}_1)$ y se anula fuera del mismo. De este modo, hemos llegado a una contradicción; por lo tanto, $\Phi(x) \equiv 0$. La función $\eta(x)$ puede escogerse, por ejemplo, así: $\eta(x) \equiv 0$ fuera del segmento $(\bar{x}_0 \leqslant x \leqslant \bar{x}_1)$; $\eta(x) = k(x-\bar{x}_0)^{2n}(x-\bar{x}_1)^{2n}$ en el segmento $(\bar{x}_0 \leqslant x \leqslant \bar{x}_1)$, donde n es un entero positivo, y k, un factor constante. Es evidente que la función $\eta(x)$ satisface las condiciones consideradas anteriormente: es continua, tiene derivadas continuas hasta de

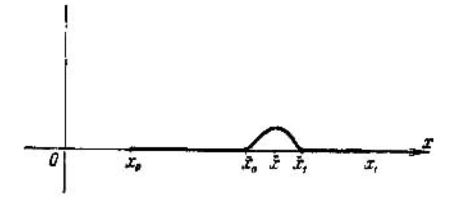


Fig. 6.5

orden $2n-1$, se anula en los puntos x_0 y x_1 y puede hacerse tan pequeña como se quiera en valor absoluto, conjuntamente con sus derivadas, disminuyendo el módulo del factor k.

Observación. En forma completamente análoga se puede demostrar que si la función $\Phi(x, y)$ es continua en la región D del plano (x, y) y se tiene que $\iint\limits_D \Phi(x, y)\eta(x, y)\,dx\,dy = 0$ para funciones $\eta(x, y)$ arbitrarias que satisfagan sólo ciertas condiciones generales (continuidad, derivabilidad una o varias veces, anulación en las fronteras de la región D, $|\eta| < \varepsilon$, $|\eta'_x| < \varepsilon$, $|\eta'_y| < \varepsilon$), entonces será $\Phi(x, y) \equiv 0$ en la región D. La función $\eta(x, y)$ al demostrar el lema fundamental se puede tomar, por ejemplo, así: $\eta(x, y) \equiv 0$ fuera de un entorno circular de radio suficientemente pequeño ε_1 del punto $(\bar{x}, \bar{y})$, en el cual $\Phi(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$, y en dicho entorno la función $\eta(x, y) = k[(x-\bar{x})^2 + (y-\bar{y})^2 - \varepsilon_1^2]^{2n}$ (fig. 6.6). Un lema análogo se cumple también para las integrales múltiples.

Apliquemos ahora el lema fundamental para simplificar la condición necesaria (6.2), obtenida anteriormente, de extremo de la funcional (6.1),

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y\,dx = 0. \tag{6.2}$$

Todas las condiciones del lema se cumplen: en la curva que realiza el extremo, el factor $\left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}\right)$ es función continua, y la variación δy es una función arbitraria a la cual se han impuesto sólo limitaciones de carácter general, ya previstas en el lema fundamental. Por lo tanto, $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \equiv 0$ en la curva $y = y(x)$ que rea-

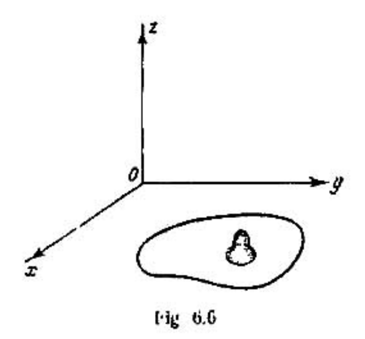


Fig. 6.6

liza el extremo de la funcional considerada, es decir, $y = y(x)$ es solución de la ecuación diferencial de segundo orden

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0,$$

o bien, en forma desarrollada,

$$F_y - F_{xy'} - F_{yy'} y' - F_{y'y'} y'' = 0.$$

Esta ecuación se denomina *ecuación de Euler* (ella fue publicada por primera vez por él en 1744). Las curvas integrales de la ecuación de Euler $y = y(x, C_1, C_2)$ se llaman *extremales*. Sólo en las extremales puede alcanzarse un extremo de la funcional

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx.$$

Para hallar la curva que realice un extremo de la funcional (6.1) se integra la ecuación de Euler y se determinan las dos constantes arbitrarias, que figuran en la solución general de esta ecuación, de las condiciones de frontera $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$. Sólo en las extremales que satisfacen estas condiciones se puede realizar un extremo de la funcional. Sin embargo, para establecer si se realiza en realidad o no en ellas el extremo, y además si es un máximo o un

mínimo, hay que aplicar las condiciones suficientes de extremo, expuestas en el capítulo 8.

Recordemos que el problema de frontera

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0,\ y(x_0)=y_0,\ y(x_1)=y_1$$

no siempre tiene solución, y si la solución existe, puede no ser única (véase la pág. 162).

Obsérvese que en muchos problemas variacionales la existencia de la solución es evidente del sentido físico o geométrico del problema, y si la ecuación de Euler que satisface las condiciones de frontera es única, esta única extremal será la solución del problema variacional considerado.

Ejemplo 1. ¿En qué curvas puede alcanzar su extremo la funcional

$$v[y(x)]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[(y')^2-y^2]\,dx;\ y(0)=0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1?$$

La ecuación de Euler tiene la forma $y''+y=0$; su solución general es $y=C_1\cos x+$ $+C_2\operatorname{sen}x$. Utilizando las condiciones de frontera, se obtiene: $C_1=0$, $C_2=1$; por consiguiente, el extremo puede alcanzarse sólo en la curva $y=\operatorname{sen}x$.

Ejemplo 2. ¿En qué curvas puede alcanzar su extremo la funcional

$$v[y(x)]=\int_0^1[(y')^2+12xy]\,dx,\quad y(0)=0,\ y(1)=1?$$

La ecuación de Euler tiene la forma $y''-6x=0$, de donde $y=x^3+C_1x+C_2$. Utilizando las condiciones de frontera, obtenemos: $C_1=0$, $C_2=0$; por lo tanto, el extremo puede alcanzarse sólo en la curva $y=x^3$.

En estos dos ejemplos la ecuación de Euler fue integrada fácilmente; pero esto no siempre ocurre, puesto que las ecuaciones diferenciales de segundo orden se integran en forma finita*) sólo en casos excepcionales. Veamos algunos casos simples de integración de la ecuación de Euler.

1) F no depende de y':

$$F=F(x,y).$$

La ecuación de Euler tiene la forma $F_y(x,y)=0$, puesto que $F_{y'}=0$. La solución de la ecuación finita $F_y(x,y)=0$ obtenida no contiene elementos arbitrarios y, por esto, en general no satisface las condiciones de frontera $y(x_0)=y_0$ e $y(x_1)=y_1$.

*) Véase la nota al pie de la pág. 22 (*N. de la Red.*).

Por lo tanto, la solución del problema variacional considerado en general no existe. Sólo en casos excepcionales, cuando la curva

$$F_y(x, y) = 0$$

pasa por los puntos frontera (x_0, y_0) y (x_1, y_1), existe una curva en la que se puede alcanzar un extremo.

Ejemplo 3.

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} y^2\,dx; \quad y(x_0) = y_0,$$
$$y(x_1) = y_1.$$

La ecuación de Euler tiene la forma

$$F_y = 0, \text{ o bien } y = 0.$$

La extremal $y = 0$ pasa por los puntos frontera sólo cuando $y_0 = 0$ e $y_1 = 0$ (fig. 6.7).

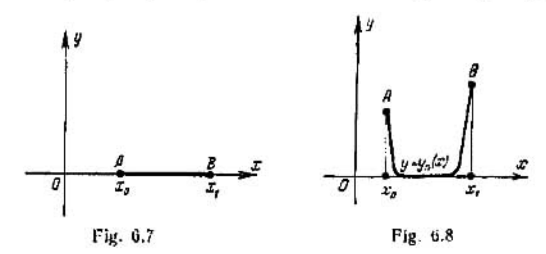


Fig. 6.7 Fig. 6.8

Si $y_0 = 0$ e $y_1 = 0$, es evidente que la función $y = 0$ realiza el mínimo de la funcional $v = \int_{x_0}^{x_1} y^2\,dx$, ya que $v[y(x)] \geqslant 0$, siendo $v = 0$ para $y = 0$. Si, en cambio, por lo menos y_0 ó y_1 no es igual a cero, no se alcanza el mínimo de la funcional en las funciones continuas. Esto es comprensible, pues se puede tomar una sucesión de funciones continuas $y_n(x)$, cuyas gráficas se compongan de un arco de curva que baje en forma cada vez más empinada del punto (x_0, y_0) hacia el eje de las abscisas; después, de un segmento del eje de las abscisas, casi coincidente con todo el segmento (x_0, x_1) y, finalmente, cerca del punto x_1, de un arco de curva que suba bruscamente hasta el punto (x_1, y_1) (fig. 6.8). Es evidente que en las curvas de esta sucesión los valores de la funcional de diferencian de cero en forma arbitrariamente pequeña y, por lo tanto, la cota inferior de valores de la funcional es igual a cero. Sin embargo, esta cota inferior no puede alcanzarse en una curva con-

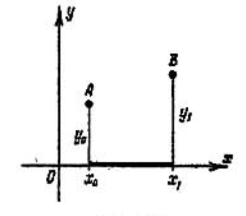


Fig 6.9

tinua ya que, para cualquier curva continua $y=y(x)$ no idénticamente nula, la integral $\int_{x_0}^{x_1} y^2\,dx>0$. Esta cota inferior de valores de la funcional se alcanza en la función discontinua (fig. 6.9)

$$\begin{aligned} &y(x_0)=y_0,\\ &y(x)=0 \quad \text{para} \quad x_0<x<x_1,\\ &y(x_1)=y_1. \end{aligned}$$

2) La función F depende de y' en forma lineal:

$$F(x,\ y,\ y')=M(x,y)+N(x,y)\,y';$$

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\left[M(x,y)+N(x,y)\frac{dy}{dx}\right]dx.$$

La ecuación de Euler tiene la forma

$$\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial y}y'-\frac{d}{dx}N(x,y)=0,$$

ó

$$\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial y}y'-\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial N}{\partial y}y'=0,$$

o bien

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=0;$$

pero ésta, al igual que en el caso anterior, de nuevo es una ecuación finita, y no diferencial. La curva $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=0$ no satisface, en general, las condiciones de frontera. Por lo tanto, el problema variacional, por regla general, no tiene solución en la clase de funciones continuas. Si, en cambio, $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\equiv 0$, la expresión $M\,dx+N\,dy$ es una diferencial total y

$$v=\int_{x_0}^{x_1}\left(M+N\frac{dy}{dx}\right)dx=\int_{x_0}^{x_1}(M\,dx+N\,dy)$$

no depende del camino de integración; el valor de la funcional v es constante en las curvas admisibles. El problema variacional pierde el sentido.

Ejemplo 4.

$$v[y(x)]=\int_0^1 (y^2+x^2y')\,dx;\quad y(0)=0,\ y(1)=a.$$

La ecuación de Euler tiene la forma $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=0$, o bien $y-x=0$. La primera condición de frontera, $y(0)=0$, se cumple, pero la segunda se satisface sólo cuando $a=1$. Si $a\neq 1$, no existe ninguna extremal que satisfaga las condiciones de frontera.

Ejemplo 5.

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}(y+xy')\,dx, \quad \text{o bien } v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}(y\,dx+x\,dy);$$

$$y(x_0)=y_0, \quad y(x_1)=y_1.$$

La ecuación de Euler se reduce a una identidad, $1\equiv 1$. La expresión subintegral es una diferencial total, y la integral no depende del camino de integración:

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}d(xy)=x_1y_1-x_0y_0$$

por cualquier camino de integración. El problema variacional no tiene sentido.

3) F depende sólo de y':

$$F=F(y').$$

La ecuación de Euler tiene la forma $F_{y'y'}y''=0$, puesto que $F_y=F_{xy'}=F_{yy'}=0$. De aquí se obtiene $y''=0$, o bien $F_{y'y'}=0$. Si $y''=0$, entonces $y=C_1x+C_2$, que es una familia biparamétrica de líneas rectas. Si la ecuación $F_{y'y'}(y')=0$ tiene una o varias raíces reales $y'=k_i$, entonces $y=k_ix+C$, y obtenemos una familia monoparamétrica de rectas contenida en la familia biparamétrica $y=C_1x+C_2$ obtenida anteriormente. De esta forma, en el caso $F=F(y')$ todas las líneas rectas posibles $y=C_1x+C_2$ son extremales.

Ejemplo 6. La longitud del arco de una curva

$$l[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

tiene como extremales las rectas $y=C_1x+C_2$.

Ejemplo 7. El tiempo $t[y(x)]$ invertido en el desplazamiento por cierta curva $y=y(x)$ desde el punto $A(x_0, y_0)$ hasta el punto $B(x_1, y_1)$, si la velocidad $\frac{ds}{dt}=v(y')$ depende sólo de y', es una funcional de la forma

$$t[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(y')}\,dx$$

$$\left(\frac{ds}{dt}=v(y');\ dt=\frac{ds}{v(y')}=\frac{\sqrt{1+y'^2}\,dx}{v(y')};\quad t=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(y')}\,dx\right).$$

Por lo tanto, las extremales de esta funcional son líneas rectas.

4) F depende sólo de x e y':

$$F = F(x, y').$$

La ecuación de Euler toma la forma $\frac{d}{dx} F_{y'}(x, y') = 0$ y, por lo tanto, tiene la primera integral $F_{y'}(x, y') = C_1$. Además, como la ecuación de primer orden obtenida $F_{y'}(x, y') = C_1$ no contiene a y, ésta puede integrarse o bien resolviéndola directamente respecto a y' e integrando, o bien introduciendo un parámetro escogido en forma adecuada (véase la pág. 72).

Ejemplo 8. La funcional

$$t[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x} dx$$

(t es el tiempo invertido en el desplazamiento por la curva $y = y(x)$ de un punto a otro, si la velocidad del movimiento es $v = x$, puesto que si $\frac{ds}{dt} = x$, entonces $dt = \frac{ds}{x}$ y $t = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x} dx$). La primera integral de la ecuación de Euler $F_{y'} = C_1$ tiene la forma $\frac{y'}{x\sqrt{1+y'^2}} = C_1$. La forma más sencilla de integrar esta ecuación es introducir un parámetro, haciendo $y' = \operatorname{tg} t$; entonces

$$x = \frac{1}{C_1} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{C_1} \operatorname{sen} t,$$

o bien $x = \overline{C}_1 \operatorname{sen} t$, donde $\overline{C}_1 = \frac{1}{C_1}$;

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} t;\ dy = \operatorname{tg} t\, dx = \operatorname{tg} t \cdot \overline{C}_1 \cos t\, dt = \overline{C}_1 \operatorname{sen} t\, dt.$$

Integrando, se obtiene $y = -\overline{C}_1 \cos t + C_2$. De esta manera,

$$x = \overline{C}_1 \operatorname{sen} t,\ y - C_2 = -\overline{C}_1 \cos t$$

o bien, eliminando t, obtenemos $x^2 + (y - C_2)^2 = \overline{C}_1^2$, que es una familia de circunferencias con centros en el eje de ordenadas.

5) F depende sólo de y e y':

$$F = F(y, y').$$

La ecuación de Euler tiene la forma $F_y - F_{yy'} y' - F_{y'y'} y'' = 0$, puesto que $F_{xy'} = 0$. Si se multiplica esta ecuación miembro a miembro por y', entonces, como no es difícil comprobar, el primer miembro se transforma en la derivada exacta $\frac{d}{dx}(F - y' F_{y'})$.

En efecto,

$$\frac{d}{dx}(F-y'F_{y'})=F_y y'+F_{y'}y''-y''F_{y'}-F_{yy'}y'^2-F_{y'y'}y'y''=$$
$$=y'(F_y-F_{yy'}y'-F_{y'y'}y'').$$

Por consiguiente, la ecuación de Euler tiene la primera integral

$$F-y'F_{y'}=C_1;$$

además, como esta ecuación de primer orden no contiene explícitamente a x, puede ser integrada resolviéndola con respecto a y' y separando variables, o introduciendo un parámetro.

Ejemplo 9. Problema de la superficie mínima de rotación: determinar la curva, con sus puntos frontera dados, que al girar alrededor del eje de las abscisas forme una superficie de área mínima (fig. 6.10).

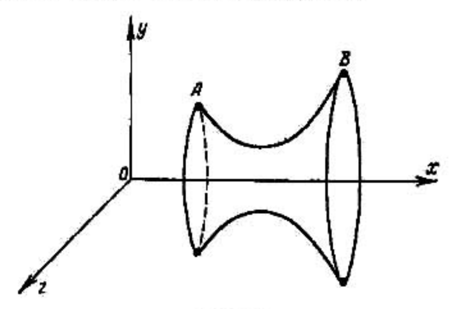


Fig. 6.10

Como es sabido, el área de una superficie de revolución es

$$S[y(x)]=2\pi\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

La función subintegral depende sólo de y e y'; por lo tanto, la primera integral de la ecuación de Euler tiene la forma

$$F-y'F_{y'}=C_1,$$

o, en nuestro caso, $y\sqrt{1+y'^2}-\dfrac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}}=C_1$

Simplificando, se obtiene $\dfrac{y}{\sqrt{1+y'^2}}=C_1$. El modo más sencillo de integrar esta ecuación es hacer la sustitución $y'=\operatorname{sh} t$. Entonces $y=C_1\operatorname{ch} t$, y

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{C_1\operatorname{sh} t\,dt}{\operatorname{sh} t}=C_1\,dt;\quad x=C_1t+C_2.$$

De este modo, la superficie buscada se forma por rotación de la línea cuya ecuación en forma paramétrica es

$$x=C_1t+C_2,$$
$$y=C_1 \operatorname{ch} t.$$

Eliminando el parámetro t, tendremos $y=C_1 \operatorname{ch}\frac{x-C_2}{C_1}$, que es una familia de catenarias; al girar, éstas forman superficies denominadas catenoides. Las constantes C_1 y C_2 se determinan por la condición de que la línea buscada pase por los puntos frontera dados (según la posición de los puntos A y B pueden existir una, dos o ninguna solución).

Ejemplo 10. Problema de la braquistócrona (véase la pág. 288): determinar la curva que una dos puntos dados A y B al moverse por la cual un punto material caiga desde el punto A hasta el B en tiempo mínimo (el rozamiento y la resistencia del medio se desprecian).

Ubiquemos el origen de coordenadas en el punto A, el eje Ox, en forma horizontal, y el Oy, verticalmente hacia abajo. La velocidad de movimiento del punto material es $\frac{ds}{dt}=\sqrt{2gy}$; de aquí se halla el tiempo invertido en el desplazamiento del punto desde la posición $A(0, 0)$ hasta la posicion $B(x_1, y_1)$:

$$t[y(x)]=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\,dx;\quad y(0)=0,\quad y(x_1)=y_1.$$

Como esta funcional también es de forma simple y su función subintegral no contiene explícitamente a x, entonces la ecuación de Euler tiene la primera integral $F-y'F_{y'}=C$, o, en nuestro caso,

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}-\frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}}=C,$$

de donde, después de simplificar, tendremos $\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}}=C$, o bien $y(1+y'^2)=C_1$. Introduzcamos el parámetro t, haciendo $y'=\operatorname{ctg} t$; entonces se obtiene:

$$y=\frac{C_1}{1+\operatorname{ctg}^2 t}=C_1\operatorname{sen}^2 t=\frac{C_1}{2}(1-\cos 2t);$$

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{2C_1\operatorname{sen} t\cos t\,dt}{\operatorname{ctg} t}=2C_1\operatorname{sen}^2 t\,dt=C_1(1-\cos 2t)\,dt.$$

$$x=C_1\left(t-\frac{\operatorname{sen} 2t}{2}\right)+C_2=\frac{C_1}{2}(2t-\operatorname{sen} 2t)+C_2.$$

Por lo tanto, en forma paramétrica la ecuación de la línea buscada es

$$x-C_2=\frac{C_1}{2}(2t-\operatorname{sen} 2t),\quad y=\frac{C_1}{2}(1-\cos 2t).$$

Si se transforma el parámetro mediante la sustitución $2t=t_1$, y se toma en cuenta que $C_2=0$, puesto que para $y=0$ es $x=0$, se obtiene la ecuación de una

familia de cicloides en la forma habitual:

$$x=\frac{C_1}{2}(t_1-\operatorname{sen} t_1),$$

$$y=\frac{C_1}{2}(1-\cos t_1),$$

siendo $\frac{C_1}{2}$ el radio de la circunferencia que rueda, el cual se determina de la condición de que la cicloide pase por el punto $B(x_1, y_1)$. De este modo, la braquistócrona es una cicloide.

§ 3. FUNAIONALES DE LA FORMA

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\,dx$$

Para obtener las condiciones necesarias de extremo de la funcional del tipo más general

$$v[y_1, y_2, \ldots, y_n]=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\,dx$$

con condiciones de frontera dadas para todas las funciones

$$y_1(x_0)=y_{10}, \quad y_2(x_0)=y_{20}, \ldots, \quad y_n(x_0)=y_{n0},$$
$$y_1(x_1)=y_{11}, \quad y_2(x_1)=y_{21}, \ldots, \quad y_n(x_1)=y_{n1},$$

variaremos sólo una de las funciones

$$y_j(x) \qquad (j=1, 2, \ldots, n),$$

dejando las demás invariables. Entonces la funcional $v[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ se transforma en una funcional que depende sólo de una función variable, por ejemplo, de $y_i(x)$,

$$v[y_1, y_2, \ldots, y_n]=\tilde{v}[y_i]$$

del tipo considerado en el § 2. Por consiguiente, la función que realiza el extremo debe satisfacer la ecuación de Euler

$$F_{y_i}-\frac{d}{dx}F_{y_i'}=0.$$

Como este razonamiento es aplicable a cualquier función y_i ($i=1, 2, \ldots, n$), se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$F_{y_i}-\frac{d}{dx}F_{y_i'}=0 \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

que determinan, en general, una familia dependiente de $2n$ parámetros de curvas integrales en el espacio x, y_1, y_2, ..., y_n, que es la familia de extremales del problema variacional dado.

Si, en particular, la funcional depende sólo de dos funciones $y(x)$ y $z(x)$:

$$v[y(x),\ z(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')\,dx;$$

$$y(x_0) = y_0,\quad z(x_0) = z_0,\quad y(x_1) = y_1,\quad z(x_1) = z_1$$

o sea, se determina eligiendo la curva alabeada $y = y(x)$, $z = z(x)$ (fig. 6.11), entonces, variando sólo $y(x)$ y fijando $z(x)$, cambiamos nuestra curva de tal modo que su proyección en el plano xOz no varía, es decir, la curva permanece todo el tiempo en el cilindro de proyección $z = z(x)$ (fig. 6.12).

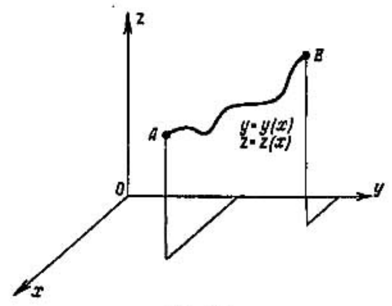


Fig. 6.11

Análogamente, fijando $y(x)$ y variando $z(x)$, variamos la curva de modo que ésta permanezca todo el tiempo en el cilindro de proyección $y = y(x)$. Entonces obtenemos un sistema de dos ecuaciones de Euler

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \quad \text{y} \quad F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} = 0.$$

Ejemplo 1. Hallar las extremales de la funcional

$$v[y(x),\ z(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [y'^2 + z'^2 + 2yz]\,dx,\quad y(0) = 0,\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

$$z(0) = 0,\quad z\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

El sistema de ecuaciones diferenciales de Euler tiene la forma

$$y'' - z = 0,$$
$$z'' - y = 0.$$

Eliminando una de las funciones desconocidas, por ejemplo, z, se obtiene $y^{IV} - y = 0$. Integrando esta ecuación lineal con coeficientes constantes, tendremos:

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4 \operatorname{sen} x;$$
$$z = y'', \quad z = C_1e^x + C_2e^{-x} - C_3\cos x - C_4 \operatorname{sen} x.$$

Utilizando las condiciones de frontera, se halla:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = 1;$$

por lo tanto, $y = \operatorname{sen} x$, $z = -\operatorname{sen} x$.

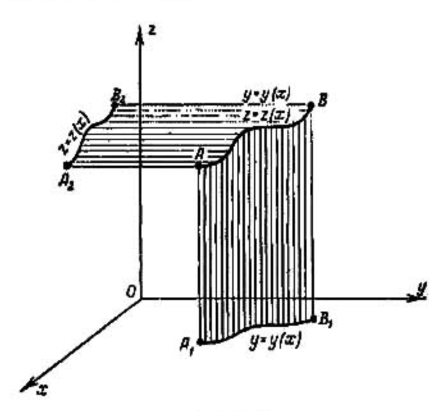


Fig. 6.12

E j e m p l o 2. Hallar las extremales de la funcional

$$v[y(x),\ z(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(y',\ z')\,dx.$$

El sistema de ecuaciones de Euler tiene la forma

$$F_{y'y'}y'' + F_{y'z'}z'' = 0; \quad F_{y'z'}y'' + F_{z'z'}z'' = 0,$$

de donde, considerando que $F_{y'y'}F_{z'z'} - (F_{y'z'})^2 \neq 0$, obtenemos $y'' = 0$ y $z'' = 0$, o bien $y = C_1x + C_2$, $z = C_3x + C_4$, que es una familia de líneas rectas en el espacio.

E j e m p l o 3. Hallar las ecuaciones diferenciales de las líneas de propagación de la luz en un medio óptico heterogéneo, en el cual la velocidad de propagación de la luz es igual a $v(x,\ y,\ z)$.

Según el principio de Fermat, la luz se propaga desde un punto $A(x_0, y_0)$ hasta otro $B(x_1, y_1)$ por la curva para la cual sea mínimo el tiempo T de paso de la luz. Si la ecuación de la curva buscada es $y=y(x)$, $z=z(x)$, entonces

$$T=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{v(x, y, z)}\,dx.$$

El sistema de ecuaciones de Euler para esta funcional

$$\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{v^2}+\frac{d}{dx}\frac{y'}{v\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{v^2}+\frac{d}{dx}\frac{z'}{v\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=0,$$

será precisamente el sistema que determine las líneas de propagación de la luz.

§ 4. FUNCIONALES QUE DEPENDEN DE LAS DERIVADAS DE ORDEN MAYOR QUE 1

Analicemos el extremo de la funcional

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x))\,dx,$$

donde la función F se considerará derivable $n+2$ veces con respecto a todos los argumentos, y supondremos que las condiciones de frontera tienen la forma

$$y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y'_0,\quad \ldots,\quad y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)};$$
$$y(x_1)=y_1,\quad y'(x_1)=y'_1,\quad \ldots,\quad y^{(n-1)}(x_1)=y_1^{(n-1)},$$

es decir, en los puntos frontera están dados los valores no sólo de las funciones, sino también de sus derivadas hasta de orden $n-1$ inclusive. Supongamos que el extremo se alcanza en la curva $y=y(x)$, derivable $2n$ veces. Sea $y=\bar{y}(x)$ la ecuación de cierta curva de comparación, también derivable $2n$ veces.

Consideremos la familia monoparamétrica de funciones $y(x, \alpha)=y(x)+\alpha[\bar{y}(x)-y(x)]$, o bien $y(x, \alpha)=y(x)+\alpha\delta y$. Para $\alpha=0$, $y(x, \alpha)=y(x)$; para $\alpha=1$, $y(x, \alpha)=\bar{y}(x)$. Si consideramos el valor de la funcional $v[y(x)]$ sólo en las curvas de la familia $y=y(x, \alpha)$, entonces ésta se transforma en una función del parametro α, la cual alcanza su extremo para $\alpha=0$; por lo tanto, $\frac{d}{d\alpha}v[y(x, \alpha)]\Big|_{\alpha=0}=0$. Esta derivada, de acuerdo con lo dicho en el § 1, se llama *varia-*

ción de la funcional v y se designa por δv:

$$\delta v = \left[\frac{d}{d\alpha}\int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha), \ldots, y^{(n)}(x, \alpha))\,dx\right]_{\alpha=0} =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'}\delta y' + F_{y''}\delta y'' + \ldots + F_{y^{(n)}}\delta y^{(n)})\,dx.$$

Integremos por partes una vez el segundo sumando del segundo miembro:

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y'}\delta y'\,dx = [F_{y'}\delta y]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} F_{y'}\delta y\,dx,$$

el tercer sumando, dos veces:

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y''}\delta y''\,dx = [F_{y''}\delta y']_{x_0}^{x_1} - \left[\frac{d}{dx} F_{y''}\delta y\right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^2}{dx^2} F_{y''}\delta y\,dx,$$

etc., el último sumando n veces:

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y^{(n)}}\delta y^{(n)}\,dx = [F_{y^{(n)}}\delta y^{(n-1)}]_{x_0}^{x_1} - \left[\frac{d}{dx} F_{y^{(n)}}\delta y^{(n-2)}\right]_{x_0}^{x_1} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^n \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}}\delta y\,dx.$$

Tomando en cuenta las condiciones de frontera, en virtud de las cuales las variaciones $\delta y = \delta y' = \delta y'' = \ldots = \delta y^{(n-1)} = 0$ para $x = x_0$ y para $x = x_1$, obtenemos por último

$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}}\right) \delta y\,dx.$$

Como en la curva que realiza el extremo se tiene

$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}}\right) \delta y\,dx = 0$$

para funciones δy arbitrarias, y como el primer factor bajo el símbolo integral es función continua de x en la misma curva $y = y(x)$, entonces, debido al lema fundamental, el primer factor es idénticamente nulo:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} \equiv 0.$$

De este modo, la función $y=y(x)$ que realiza el extremo de la funcional

$$v[y(x)]\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})\,dx$$

debe ser solución de la ecuación

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}+\ldots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}=0.$$

Esta ecuación diferencial de orden $2n$ recibe el nombre de *ecuación de Euler-Poisson*, y sus curvas integrales se denominan *extremales* del problema variacional considerado. La solución general de esta ecuación contiene $2n$ constantes arbitrarias, las cuales pueden ser, en general, determinadas a partir de las $2n$ condiciones de frontera:

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)};$$
$$y(x_1)=y_1,\ y'(x_1)=y_1',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_1)=y_1^{(n-1)}.$$

Ejemplo 1. Hallar la extremal de la funcional

$$v[y(x)]=\int_0^1 (1+y''^2)\,dx;$$
$$y(0)=0,\quad y'(0)=1,\quad y(1)=1,\quad y'(1)=1.$$

La ecuación de Euler-Poisson tiene la forma $\frac{d^2}{dx^2}(2y'')=0$, ó $y^{IV}=0$; su solución general es $y=C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4$. Utilizando las condiciones de frontera, obtenemos

$$C_1=0,\quad C_2=0,\quad C_3=1,\quad C_4=0.$$

De esta manera, el extremo puede alcanzarse sólo en la recta $y=x$.

Ejemplo 2. Determinar la extremal de la funcional

$$v[y(x)]=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (y''^2-y^2+x^2)\,dx$$

que satisface las condiciones

$$y(0)=1,\quad y'(0)=0,\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1.$$

La ecuación de Euler-Poisson tiene la forma $y^{IV}-y=0$; su solución general es $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\operatorname{sen} x$. Utilizando las condiciones de frontera, obtenemos $C_1=0$, $C_2=0$, $C_3=1$, $C_4=0$. De este modo, el extremo puede alcanzarse sólo en la curva $y=\cos x$.

Ejemplo 3. Determinar la extremal de la funcional

$$v[y(x)]=\int_{-l}^{l}\left(\frac{1}{2}\mu y''^2+\rho y\right)dx$$

que satisface las condiciones de frontera:

$$y(-l)=0,\quad y'(-l)=0,\quad y(l)=0,\quad y'(l)=0.$$

A este problema variacional se reduce la determinación del eje de una viga cilíndrica elástica deformada con extremos fijos. Si la viga es homogénea, entonces ρ y μ son constantes, y la ecuación de Euler-Poisson tiene la forma

$$\rho+\frac{d^2}{dx^2}(\mu y'')=0,\quad \text{o bien}\quad y^{\text{IV}}=-\frac{\rho}{\mu},$$

de donde

$$y=-\frac{\rho x^4}{24\mu}+C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4.$$

Utilizando las condiciones de frontera, se halla por último

$$y=-\frac{\rho}{24\mu}(x^4-2l^2x^2+l^4),\quad \text{o bien}\quad y=-\frac{\rho}{24\mu}(x^2-l^2)^2.$$

Si la funcional v tiene la forma

$$v[y(x),\ z(x)]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n)},\ z,\ z',\ \ldots,\ z^{(m)})\,dx,$$

variando sólo $y(x)$ y considerando $z(x)$ fija, se halla que las funciones $y(x)$ y $z(x)$ que realizan el extremo deben satisfacer la ecuación de Euler-Poisson

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\ldots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}=0;$$

variando $z(x)$ y considerando $y(x)$ fija, obtenemos que las mismas funciones deben satisfacer la ecuación

$$F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}+\ldots+(-1)^m\frac{d^m}{dx^m}F_{z^{(m)}}=0.$$

De esta manera, las funciones $z(x)$ e $y(x)$ deben satisfacer el sistema de dos ecuaciones

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\ldots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}=0,$$

$$F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}+\ldots+(-1)^m\frac{d^m}{dx^m}F_{z^{(m)}}=0.$$

En forma completamente análoga se puede razonar también al analizar el extremo de una funcional que depende de un número arbitrario de funciones:

$$v[y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m]=$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}F(x,\ y_1,\ y_1',\ \ldots,\ y_1^{(n_1)},\ y_2,\ y_2',\ \ldots,\ y_2^{(n_2)},\ \ldots$$

$$\ldots,\ y_m,\ y_m',\ \ldots,\ y_m^{(n_m)})\,dx.$$

Variando sólo alguna $y_i(x)$ y conservando invariables las demás, obtenemos la condición necesaria fundamental de extremo en la forma

$$F_{y_i}-\frac{d}{dx}F_{y_i'}+\ldots+(-1)^{n_i}\frac{d^{n_i}}{dx^{n_i}}F_{y_i^{(n_i)}}=0 \quad (i=1, 2, \ldots, m).$$

§ 5. FUNCIONALES QUE DEPENDEN DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES INDEPENDIENTES

Analicemos el extremo de la funcional

$$v[z(x, y)]=\iint_D F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)dx\,dy;$$

además, en la frontera C de la región D los valores de la función $z(x, y)$ están dados, es decir, está dado un contorno alabeado $\bar{C}$

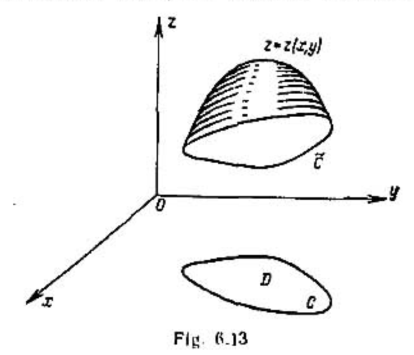


Fig. 6.13

por el cual deben pasar todas las superficies admisibles (fig. 6.13). Para abreviar la escritura, designemos $\frac{\partial z}{\partial x}=p$ y $\frac{\partial z}{\partial y}=q$. La función F se considerará derivable tres veces. La superficie $z=z(x, y)$, en la cual se realiza el extremo, se supondrá derivable dos veces.

Consideremos nuevamente la familia monoparamétrica de superficies $z=z(x, y, \alpha)=z(x, y)+\alpha\delta z$, siendo $\delta z=\bar{z}(x, y)-z(x, y)$, que contiene, cuando $\alpha=0$, la superficie $z=z(x, y)$, en la cual se realiza el extremo y, para $\alpha=1$, cierta superficie admisible $z=\bar{z}(x, y)$. En las funciones de la familia $z(x, y, \alpha)$, la funcional v se transforma en una función de α, la cual debe tener un extremo

cuando $\alpha=0$; por lo tanto, $\frac{\partial}{\partial\alpha} v[z(x, y, \alpha)]\Big|_{\alpha=0}=0$. Llamando, de acuerdo con el § 1, *variación de la funcional* a la derivada de $v[z(x, y, \alpha)]$ con respecto a α cuando $\alpha=0$, y designándola por δv, tendremos:

$$\delta v = \left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}\iint_D F(x, y, z(x, y, \alpha), p(x, y, \alpha), q(x, y, \alpha))\, dx\, dy\right\}_{\alpha=0} =$$

$$= \iint_D [F_z\delta z + F_p\delta p + F_q\delta q]\, dx\, dy,$$

donde

$$z(x, y, \alpha) = z(x, y) + \alpha\delta z,$$

$$p(x, y, \alpha) = \frac{\partial z(x, y, \alpha)}{\partial x} = p(x, y) + \alpha\delta p,$$

$$q(x, y, \alpha) = \frac{\partial z(x, y, \alpha)}{\partial y} = q(x, y) + \alpha\delta q.$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial x}\{F_p\delta z\} = \frac{\partial}{\partial x}\{F_p\}\,\delta z + F_p\delta p,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\{F_q\delta z\} = \frac{\partial}{\partial y}\{F_q\}\,\delta z + F_q\delta q,$$

entonces

$$\iint_D (F_p\delta p + F_q\delta q)\, dx\, dy =$$

$$= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\{F_p\delta z\} + \frac{\partial}{\partial y}\{F_q\delta z\}\right] dx\, dy -$$

$$- \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\{F_p\} + \frac{\partial}{\partial y}\{F_q\}\right] \delta z\, dx\, dy,$$

donde $\frac{\partial}{\partial x}\{F_p\}$ es la llamada derivada parcial completa o total con respecto a x. Al calcularla, y se considera fija, pero la dependencia de z, p y q de x se toma en cuenta:

$$\frac{\partial}{\partial x}\{F_p\} = F_{px} + F_{pz}\frac{\partial z}{\partial x} + F_{pp}\frac{\partial p}{\partial x} + F_{pq}\frac{\partial q}{\partial x}$$

y análogamente

$$\frac{\partial}{\partial y}\{F_q\} = F_{qy} + F_{qz}\frac{\partial z}{\partial x} + F_{qp}\frac{\partial p}{\partial y} + F_{qq}\frac{\partial q}{\partial y}.$$

En virtud de la conocida fórmula de Green

$$\iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_C (N dy - M dx),$$

se obtiene

$$\iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\{F_p\delta z\}+\frac{\partial}{\partial y}\{F_q\delta z\}\right]dx\,dy=\int_C (F_p\,dy-F_q\,dx)\,\delta z=0.$$

La ultima integral es igual a cero, debido a que en el contorno C la variación $\delta z=0$, puesto que todas las superficies admisibles pasan por el mismo contorno alabeado $\bar{C}$. Por lo tanto,

$$\iint_D [F_p\delta p+F_q\delta q]\,dx\,dy=-\iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\{F_p\}+\frac{\partial}{\partial y}\{F_q\}\right]\delta z\,dx\,dy,$$

y la condición necesaria de extremo

$$\iint_D (F_z\delta z+F_p\delta p+F_q\delta q)\,dx\,dy=0$$

toma la forma

$$\iint_D \left(F_z-\frac{\partial}{\partial x}\{F_p\}-\frac{\partial}{\partial y}\{F_q\}\right)\delta z\,dx\,dy=0.$$

Como la variación δz es arbitraria (a δz se le imponen limitaciones sólo de carácter general con respecto a la continuidad y a la derivabilidad, anulación en el controno C, etc.) y el primer factor es continuo, entonces, por el lema fundamental (pág. 302), en la superficie $z=z(x, y)$ que realiza el extremo será

$$F_z-\frac{\partial}{\partial x}\{F_p\}-\frac{\partial}{\partial y}\{F_q\}\equiv 0.$$

Por consiguiente, $z(x, y)$ es solución de la ecuación

$$F_z-\frac{\partial}{\partial x}\{F_p\}-\frac{\partial}{\partial y}\{F_q\}=0.$$

Esta ecuación diferencial de segundo orden en derivadas parciales, a la cual debe satisfacer la función $z(x, y)$ que realiza el extremo, lleva el nombre de *ecuación de Ostrogradski*, en honor al eminente matemático ruso M. V. Ostrogradski, quien la obtuvo por primera vez en el año 1834; sin embargo, para las regiones D rectangulares se encontraba ya en los trabajos de L. Euler.

Ejemplo 1.

$$v[z(x, y)]=\iint_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy;$$

en la frontera C de la región D se dan los valores de la función z: $z=f(x, y)$. La ecuación de Ostrogradski en este caso tiene la forma

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

o, en forma compacta,

$$\Delta z = 0,$$

es decir, es la conocida *ecuación de Laplace*; además, hay que hallar la solución continua en D de esta ecuación, que tome valores dados en la frontera de esta región. Este es el llamado *problema de Dirichlet* uno de los problemas fundamentales de la física matemática.

Ejemplo 2.

$$v[z(x, y)] = \iint_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 2z f(x, y) \right] dx\, dy;$$

la función z se da en la frontera de la región D. La ecuación de Ostrogradski en este caso tiene la forma

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x, y)$$

o, en forma compacta,

$$\Delta z = f(x, y).$$

Esta ecuación, llamada *ecuación de Poisson*, se encuentra también con mucha frecuencia en los problemas de la física matemática.

Ejemplo 3. El problema sobre la determinación de la superficie de área mínima, limitada por un contorno dado C, se reduce al análisis del mínimo de la funcional

$$S[z(x, y)] = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy.$$

En este caso la ecuación de Ostrogradski tiene la forma

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right\} = 0$$

o bien

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right] = 0,$$

es decir, la curvatura media en cada punto es igual a cero. Es sabido que la realización física de las superficies mínimas son películas jabonosas, extendidas sobre el contorno C.

Para la funcional

$$v[z(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = \iint_D \cdots \int F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

donde $p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}$, en base a la condición necesaria fundamental de extremo $\delta v = 0$ se obtiene, en forma completamente análoga, la siguiente ecuación de Ostrogradski:

$$F_z - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\{F_{p_i}\} = 0,$$

a la cual debe satisfacer la función

$$z = z(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

que realiza el extremo de la funcional v.

Por ejemplo, para la funcional

$$v = \iiint\limits_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \right] dx\,dy\,dz$$

la ecuación de Ostrogradski tiene la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Si la función subintegral de la funcional v depende de derivadas de orden mayor, entonces aplicando varias veces las transformaciones empleadas al obtener la ecuación de Ostrogradski obtenemos, como condición necesaria de extremo, que la función que realiza el extremo debe satisfacer una ecuación análoga a la de Euler-Poisson (pág. 317).

Por ejemplo, para la funcional

$$v[z(x, y)] = \iint\limits_D F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) dx\,dy$$

se obtiene la ecuación

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x}\{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y}\{F_q\} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\{F_r\} + \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\{F_s\} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\{F_t\} = 0,$$

donde

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

La función que realiza el extremo de la funcional v debe satisfacer esta ecuación de cuarto orden en derivadas parciales.

Por ejemplo, para la funcional

$$v = \iint\limits_D \left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2 \right] dx\,dy,$$

la función z que realiza el extremo debe satisfacer la llamada *ecuación biarmónica*

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = 0,$$

que habitualmente se escribe en forma compacta así: $\Delta\Delta z = 0$.

Para la funcional

$$v=\iint_D \left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2-2zf(x, y)\right]dx\,dy$$

la función $z(x, y)$ que realiza el extremo debe satisfacer la ecuación $\Delta\Delta z=f(x, y)$.

Los problemas sobre el extremo de la funcional

$$v=\iint_D \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2 dx\,dy$$

o de la funcional de forma más general

$$v=\iint_D \left\{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2-2(1-\mu)\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]\right\}dx\,dy,$$

donde μ es un parámetro, se reducen también a la ecuación biarmónica.

§ 6. PROBLEMAS VARIACIONALES EN FORMA PARAMETRICA

En muchos problemas variacionales es cómodo buscar la solución en forma paramétrica. Por ejemplo, en el problema isoperimétrico (véase la pág. 289) sobre la determinación de una curva cerrada de longitud dada l que delimite el área máxima S, no es cómodo buscar la solución en la forma $y=y(x)$, puesto que por el mismo sentido del problema la función $y(x)$ no es uniforme (fig. 6.14). Por esto, en el problema considerado es conveniente buscar la solución en forma paramétrica: $x=x(t)$, $y=y(t)$. En consecuencia, en este caso hay que buscar el extremo de la funcional

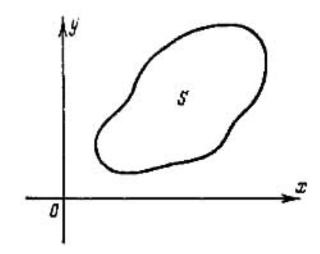


Fig. 6.14

$$S[x(t),\ y(t)]=\frac{1}{2}\int_0^T (x\dot{y}-y\dot{x})\,dt$$

con la condición $l=\int_0^T \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt$, donde l es una constante.

Supongamos que al analizar el extremo de cierta funcional

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$$

resulta más conveniente buscar la solución en forma paramétrica, $x=x(t)$,

$y=y(t)$; entonces la funcional se reduce a la forma siguiente:

$$v[x(t),\ y(t)]=\int_{t_0}^{t_1} F\left(x(t),\ y(t),\ \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right)\dot{x}(t)\,dt.$$

Obsérvese que la función subintegral obtenida después del cambio de variables

$$F\left(x(t),\ y(t),\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right)\dot{x}(t)$$

no contiene explícitamente a t y es una función homogénea de primer grado de homogeneidad con respecto a las variables $\dot{x}$ e $\dot{y}$.

De este modo, la funcional $v[x(t),\ y(t)]$ no es una funcional arbitraria de la forma

$$\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t,\ x(t),\ y(t),\ \dot{x}(t),\ \dot{y}(t))\,dt,$$

que depende de dos funciones $x(t)$ e $y(t)$, sino sólo un caso muy particular de ésta, ya que su función subintegral no contiene explícitamente a t y es homogénea de primer grado de homogeneidad con respecto a las variables $\dot{x}$ e $\dot{y}$.

Si pasásemos a cualquier otra representación paramétrica de la curva buscada, $x=x(\tau)$, $y=y(\tau)$, la funcional $v[x,\ y]$ se transformaría a la forma $\int_{\tau_0}^{\tau_1} F\left(x,\ y,\ \frac{\dot{y}_\tau}{\dot{x}_\tau}\right)\dot{x}_\tau\,d\tau$. Por lo tanto, la función subintegral de la funcional v no cambia su forma al cambiar la representación paramétrica de la curva. De este modo, la funcional v depende de la forma de la curva, y no de su representación paramétrica.

No es difícil comprobar la validez de la siguiente afirmación: si la función subintegral de la funcional

$$v[x(t),\ y(t)]=\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t,\ x(t),\ y(t),\ \dot{x}(t),\ \dot{y}(t))\,dt$$

no contiene explícitamente a t y es función homogénea de primer grado de homogeneidad con respecto a $\dot{x}$ e $\dot{y}$, entonces la funcional $v[x(t),\ y(t)]$ depende sólo de la forma de la curva $x=x(t)$, $y=y(t)$ y no de su representación paramétrica. En efecto, sea

$$v[x(t),\ y(t)]=\int_{t_0}^{t_1}\Phi(x(t),\ y(t),\ \dot{x}(t),\ \dot{y}(t))\,dt,$$

donde

$$\Phi(x,\ y,\ k\dot{x},\ k\dot{y})=k\Phi(x,\ y,\ \dot{x},\ \dot{y}).$$

Pasemos a una nueva representación paramétrica, haciendo

$$\tau=\varphi(t)\ \ (\dot{\varphi}(t)\neq 0),\ x=x(\tau),\ y=y(\tau).$$

Entonces

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi(x(t),\ y(t),\ \dot{x}(t),\ \dot{y}(t))\,dt = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \Phi(x(\tau),\ y(\tau),\ \dot{x}_\tau(\tau)\dot{\varphi}(t),\ \dot{y}_\tau(\tau)\dot{\varphi}(t))\frac{d\tau}{\dot{\varphi}(t)}.$$

En virtud de que Φ es una función homogénea de primer grado de homogeneidad con respecto a $\dot{x}$ e $\dot{y}$, tendremos

$$\Phi(x,\ y,\ \dot{x}_\tau\dot{\varphi},\ \dot{y}_\tau\dot{\varphi}) = \dot{\varphi}\,\Phi(x,\ y,\ \dot{x}_\tau,\ \dot{y}_\tau),$$

de donde

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi(x,\ y,\ \dot{x}_t,\ \dot{y}_t)\,dt = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \Phi(x,\ y,\ \dot{x}_\tau,\ \dot{y}_\tau)\,d\tau,$$

o sea, la función subintegral no cambia al cambiar la representación paramétrica.

La longitud del arco $\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt$ *), el área $\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(x\dot{y}-y\dot{x})\,dt$ delimitada por cierta curva, son ejemplos de tales funcionales.

Para hallar las extremales de las funcionales de la forma considerada

$$v[x(t),\ y(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(x,\ y,\ \dot{x},\ \dot{y})\,dt,$$

donde Φ es una función homogénea de primer grado de homogeneidad con respecto a $\dot{x}$ e $\dot{y}$, al igual que para las funcionales con función subintegral arbitraria $\Phi(t,\ x,\ y,\ \dot{x},\ \dot{y})$, hay que resolver el sistema de ecuaciones de Euler

$$\Phi_x - \frac{d}{dt}\Phi_{\dot{x}} = 0; \quad \Phi_y - \frac{d}{dt}\Phi_{\dot{y}} = 0.$$

Sin embargo, en el caso particular considerado estas ecuaciones no son independientes, puesto que deben satisfacerse, conjuntamente con cierta solución $x = x(t)$, $y = y(t)$, por cualquier otro par de funciones que den otra representación paramétrica de la misma curva; en el caso de independencia de las ecuaciones de Euler esto estaría en contradicción con el teorema de existencia y unicidad de la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales (véase la pág. 78). Esto indica que para las funcionales de la forma

$$v[x(t),\ y(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(x,\ y,\ \dot{x},\ \dot{y})\,dt,$$

donde Φ es una función homogénea de primer grado de homogeneidad con respecto a $\dot{x}$ e $\dot{y}$, una de las ecuaciones de Euler es consecuencia de la otra. Para hallar las extremales hay que tomar una de las ecuaciones de Euler e integrarla

---

*) La función $\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$ es una función homogénea *positiva* de primer grado de homogeneidad, es decir, para ella la condición $F(kx,\ ky) = kF(x,\ y)$ se satisface sólo para k positivas; sin embargo, esto es suficiente para que se cumpla la teoría expuesta en este parágrafo, ya que al efectuar el cambio de variables $\tau = \varphi(t)$, se puede considerar que $\dot{\varphi}(t) > 0$

conjuntamente con la ecuación que determina la elección del parámetro. Por ejemplo, a la ecuación $\Phi_x - \frac{d}{dt}\Phi_{\dot{x}} = 0$ puede agregársele la ecuación $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1$, lo cual indica que como parámetro fue escogida la longitud del arco de la curva.

§ 7. CIERTAS APLICACIONES

El principio variacional fundamental en la mecánica es el principio de la acción estacionaria de Ostrogradski-Hamilton, el cual afirma que entre los movimientos admisibles—es decir, compatibles con los enlaces—de un sistema de puntos materiales en realidad se efectúa el movimiento que da un valor estacionario (o sea, un valor que corresponde a un argumento para el cual la variación de la funcional sea igual a cero) a la integral

$$\int_{t_0}^{t_1} (T-U)\,dt,$$

donde T es la energía cinética, y U, la energía potencial del sistema.

Apliquemos este principio a algunos problemas de la mecánica.

Ejemplo 1. Dado un sistema de puntos materiales de masas m_i ($i=1, 2, \ldots, n$) y con coordenadas (x_i, y_i, z_i) sobre el cual actúan las fuerzas $\vec{F}_i$, que poseen una función de fuerza (potencial), $-U$, el cual depende sólo de las coordenadas:

$$F_{ix} = -\frac{\partial U}{\partial x_i}; \quad F_{iy} = -\frac{\partial U}{\partial y_i}; \quad F_{iz} = -\frac{\partial U}{\partial z_i},$$

donde F_{ix}, F_{iy} y F_{iz} son las coordenadas del vector $\vec{F}_i$ que actúa sobre el punto (x_i, y_i, z_i). Hallar las ecuaciones diferenciales del movimiento del sistema. En este caso, la energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2),$$

y la energía potencial del sistema es igual a U. El sistema de ecuaciones de Euler para la integral

$$\int_{t_0}^{t_1} (T-U)\,dt$$

tiene la forma

$$-\frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = 0; \quad -\frac{\partial U}{\partial y_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} = 0; \quad -\frac{\partial U}{\partial z_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i} = 0,$$

o bien

$$m_i\ddot{x}_i - F_{ix} = 0, \quad m_i\ddot{y}_i - F_{iy} = 0; \quad m_i\ddot{z}_i - F_{iz} = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Si el movimiento se sometiera además a cierto sistema de enlaces independientes

$$\varphi_j(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n, z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0$$
$$(j = 1, 2, \ldots, m, m < 3n),$$

entonces, a partir de las ecuaciones de los enlaces se podrían expresar m variables mediante $3n-m$ variables independientes (sin considerar el tiempo t), o expresar todas las $3n$ variables por medio de $3n-m$ coordenadas nuevas, ya independientes

$$q_1, q_2, \ldots, q_{3n-m}.$$

Entonces T y U se podrían considerar también como funciones de

$$q_1, q_2, \ldots, q_{3n-m}, \text{ y de } t:$$
$$T = T(q_1, q_2, \ldots, q_{3n-m}, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_{3n-m}, t),$$
$$U = U(q_1, q_2, \ldots, q_{3n-m}, t),$$

y el sistema de ecuaciones de Euler tendría la forma

$$\frac{\partial (T-U)}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, 3n-m).$$

Ejemplo 2. Deduzcamos la ecuación diferencial de las oscilaciones libres de una cuerda.

Ubiquemos el origen de coordenadas en uno de los extremos de la cuerda. La cuerda en estado de reposo se encuentra, bajo la acción de la tensión, en cierta recta, por la cual dirigiremos el eje de las abscisas (fig. 6.15). La desviación de la posición de equilibrio $u(x, t)$ es función de la abscisa x y del tiempo t.

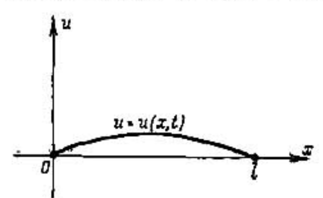


Fig. 6.15

La energía potencial U de un elemento de una cuerda absolutamente flexible es proporcional al alargamiento de la misma. El segmento de cuerda dx en estado de deformación tiene, con exactitud de hasta infinitésimos de mayor grado, la longitud $ds = \sqrt{1+u_x'^2}\,dx$ y, por lo tanto, el alargamiento del elemento es igual a $\left(\sqrt{1+u_x'^2}-1\right)dx$. Según la fórmula de Taylor,

$$\sqrt{1+u_x'^2} \approx 1 + \frac{1}{2}u_x'^2.$$

Considerando u_x' pequeño y despreciando las potencias de u_x' mayores que 1, se obtiene que la energía potencial del elemento es igual a $\frac{1}{2}ku_x'^2dx$, donde k es un factor de proporcionalidad, y la energía potencial de toda la cuerda es igual a

$$\frac{1}{2}\int_0^l ku_x'^2\,dx.$$

La energía cinética de la cuerda es

$$\frac{1}{2}\int_0^l \rho u_t'^2\,dx$$

donde ρ es la densidad. La integral $\int_{t_0}^{t_1}(T-U)\,dt$ tiene en este caso la forma

$$v=\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\left[\frac{1}{2}\rho u_t'^2-\frac{1}{2}ku_x'^2\right]dx\,dt.$$

La ecuación del movimiento de la cuerda será la ecuación de Ostrogradski para la funcional v. De este modo, la ecuación del movimiento de la cuerda tiene la forma

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_t')-\frac{\partial}{\partial x}(ku_x')=0.$$

Si la cuerda es homogénea, entonces ρ y k son constantes, y la ecuación de las oscilaciones de la cuerda se simplifica:

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0.$$

Supongamos ahora que sobre la cuerda actúa además la fuerza exterior $f(t, x)$, perpendicular a la misma en su posición de equilibrio y calculada en la unidad de masa. Como es fácil comprobar, la función de fuerza de esta fuerza exterior que actúa sobre un elemento de la cuerda es igual a $\rho f(t, x)\,u\,dx$; por consiguiente, la integral de Ostrogradski-Hamilton $\int_{t_0}^{t_1}(T-U)\,dt$ tiene la forma

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\left[\frac{1}{2}\rho u_t'^2-\frac{1}{2}ku_x'^2+\rho f(t, x)\,u\right]dx\,dt,$$

y la ecuación de las oscilaciones forzadas de la cuerda es

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_t')-\frac{\partial}{\partial x}(ku_x')-\rho f(t, x)=0,$$

o bien, si la cuerda es homogénea,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{k}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(t, x).$$

En forma completamente análoga se puede obtener la ecuación de las oscilaciones de una membrana

E j e m p l o 3. Deduzcamos la ecuación de las oscilaciones de una varilla recta. Dirijamos el eje de las abscisas por el eje de la varilla en su posición de equilibrio. La desviación de la posición de equilibrio $u(x, t)$ será función de x y del tiempo t, la energía cinética de la varilla de longitud l es

$$T=\frac{1}{2}\int_0^l \rho u_t'^2\,dx.$$

Consideraremos la varilla inestirable. La energía potencial de una varilla elástica con curvatura constante es proporcional al cuadrado de la misma. Por lo tanto, la diferencial dU de la energía potencial de la varilla es igual a

$$dU = \frac{1}{2} k \left\{ \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]^{3/2}} \right\}^2,$$

y la energía potencial de toda la varilla, la curvatura de cuyo eje es en general variable, será igual a

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l k \left\{ \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]^{3/2}} \right\}^2 dx.$$

Supongamos que las desviaciones de la varilla de la posición de equilibrio son pequeñas, y que se puede despreciar el término $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ en el denominador, entonces

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 dx.$$

La integral de Ostrogradski-Hamilton tiene la forma

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left[\frac{1}{2} \rho u_t'^2 - \frac{1}{2} k u_{xx}''^2\right] dx\, dt.$$

Por lo tanto, en el caso de las oscilaciones libres de una varilla elástica, tendremos la siguiente ecuación de movimiento:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_t') + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (k u_{xx}'') = 0.$$

Si la varilla es homogénea, entonces ρ y k son constantes, y la ecuación se transforma en

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0.$$

Si sobre la varilla actúa la fuerza exterior $f(t, x)$, es necesario considerar además el potencial de esta fuerza (véase el ejemplo anterior).

El principio de la acción estacionaria puede ser aplicado a la deducción de las ecuaciones del campo. Consideremos un campo escalar, vectorial o tensorial $w = w(x, y, z, t)$. La integral $\int_{t_0}^{t_1} (T - U)\,dt$ en este caso es igual, en general, a una integral cuádruple con respecto a las coordenadas espaciales x, y y z y al tiempo t de cierta función L, llamada *densidad de la función de Lagrange o lagrangiano.*

Comúnmente el lagrangiano es función de w, $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$, $\frac{\partial w}{\partial z}$ y $\frac{\partial w}{\partial t}$:

$$L = L\left(w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial t}\right)$$

y, por lo tanto, la acción tiene la forma

$$\iiiint_D L\left(w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial t}\right) dx\, dy\, dz\, dt. \qquad (6.3)$$

De acuerdo con el principio de la acción estacionaria, la ecuación del campo es la ecuación de Ostrogradski para la funcional (6.3):

$$L_w - \frac{\partial}{\partial x}\{L_{p_1}\} - \frac{\partial}{\partial y}\{L_{p_2}\} - \frac{\partial}{\partial z}\{L_{p_3}\} - \frac{\partial}{\partial t}\{L_{p_4}\} = 0,$$

donde

$$p_1 = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad p_2 = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad p_3 = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad p_4 = \frac{\partial w}{\partial t}.$$

EJERCICIOS DEL CAPITULO 6

1. Hallar las extremales de la funcional

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}\, dx.$$

2. Analizar el extremo de la funcional

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 + 2xyy')\, dx; \quad y(x_0) = y_0; \quad y(x_1) = y_1.$$

3. Analizar el extremo de la funcional

$$v[y(x)] = \int_0^1 (xy + y^2 - 2y^2y')\, dx; \quad y(0) = 1; \quad y(1) = 2.$$

4. Hallar las extremales de la funcional

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} y'(1 + x^2y')\, dx.$$

5. Hallar las extremales de la funcional

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y'^2 + 2yy' - 16y^2)\, dx$$

6. Hallar las extremales de la funcional

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (xy' + y'^2)\, dx.$$

7. Hallar las extremales de la funcional

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\frac{1+y^2}{y'^2}\,dx.$$

8. Hallar las extremales de la funcional

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}(y^2+y'^2-2y\operatorname{sen}x)\,dx.$$

9. Hallar las extremales de la funcional

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}(16y^2-y''^2+x^2)\,dx.$$

10. Hallar las extremales de la funcional

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}(2xy+y'''^2)\,dx.$$

11. Hallar las extremales de la funcional

$$v[y(x),\ z(x)]=\int_{x_0}^{x_1}(2yz-2y^2+y'^2-z'^2)\,dx.$$

12. Escribir la ecuación de Ostrogradski para la funcional

$$v[z(x,\ y)]=\iint_D\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy$$

13. Escribir la ecuación de Ostrogradski para la funcional

$$v[u(x,\ y,\ z)]=\iiint_D\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+2uf(x,\ y,\ z)\right]dx\,dy\,dz.$$

14. Hallar las extremales de la funcional

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\frac{y'^2}{x^3}\,dx.$$

15. Hallar las extremales de la funcional

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}(y^2+y'^2+2ye^x)\,dx.$$

16. Hallar las extremales de la funcional

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}(y^2-y'^2-2y\operatorname{sen}x)\,dx$$

17. Hallar las extremales de la funcional

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\left[y^2+(y')^2+\frac{2y}{\operatorname{ch} x}\right]dx.$$

18. Hallar las extremales de la funcional

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}[x^2(y')^2+2y^2+2xy]\,dx.$$

19. Hallar las extremales de la funcional

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}[(y'')^2-2(y')^2+y^2-2y\operatorname{sen} x]\,dx.$$

20. Hallar las extremales de la funcional

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}[(y''')^2+y^2-2yx^3]\,dx.$$

CAPITULO 7

Problemas variacionales con fronteras móviles y otros problemas

§ 1. PROBLEMA SIMPLE CON FRONTERAS MOVILES

En el capítulo 6, al analizar la funcional

$$v=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$$

se supuso que los puntos frontera (x_0, y_0) y (x_1, y_1) estaban dados. Supongamos ahora que uno o ambos puntos frontera pueden desplazarse. Entonces la clase de curvas admisibles se amplía: además de las curvas de comparación que tienen puntos comunes con la curva analizada, se pueden tomar también curvas con puntos frontera desplazados.

Por esto, si en cierta curva $y=y(x)$ se alcanza un extremo en el problema con puntos frontera móviles, entonces con mayor razón se alcanzará un extremo con respecto a la clase más restringida de curvas que tienen puntos frontera comunes con la curva $y=y(x)$. Por lo tanto, debe cumplirse la condición necesaria fundamental de extremo en el problema con fronteras inmóviles, es decir, la función $y(x)$ debe ser solución de la ecuación de Euler

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0.$$

De este modo, las curvas $y=y(x)$, en las cuales se realiza el extremo en el problema con fronteras móviles, deben ser extremales.

La solución general de la ecuación de Euler contiene dos constantes arbitrarias, para cuya determinación es necesario tener dos condiciones. En el problema con puntos frontera inmóviles dichas condiciones eran

$$y(x_0)=y_0 \quad \text{e} \quad y(x_1)=y_1.$$

En el problema con fronteras móviles falta una o ambas condiciones, y las condiciones que faltan para la determinación de las constantes arbitrarias de la solución general de la ecuación de Euler deben ser obtenidas a partir de la condición necesaria fundamental de extremo: la igualdad a cero de la variación δv.

Como en el problema con fronteras móviles el extremo se alcanza sólo en las soluciones $y = y(x, C_1, C_2)$ de la ecuación de Euler, en adelante se puede considerar el valor de la funcional sólo en las funciones de esta familia. Entonces la funcional $v[y(x, C_1, C_2)]$ se transforma en función de los parámetros C_1 y C_2 y de los límites de integración x_0 y x_1, y la variación de la funcional coincide con la diferencial de esta función. Consideremos para simplificar que uno de los puntos frontera, por ejemplo (x_0, y_0), está fijo, y el otro, (x_1, y_1), puede trasladarse y pasar al punto $(x_1 + \Delta x_1, y_1 + \Delta y_1)$ o, como generalmente se designa en el cálculo variacional, $(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1)$.

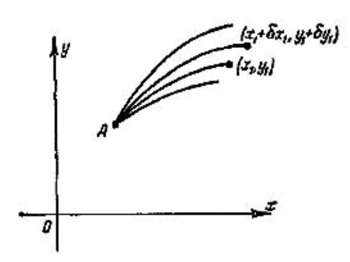


Fig. 7.1

Consideraremos próximas a las curvas admisibles $y = y(x)$ e $y = y(x) + \delta y$ si los módulos de las variaciones δy y $\delta y'$ son pequeños, así como los módulos de los incrementos δx_1 y δy_1 (los incrementos δx_1 y δy_1 son llamados generalmente variaciones de los valores límite x_1 e y_1).

Las extremales que pasan por el punto (x_0, y_0) forman un haz de extremales $y = y(x, C_1)$. En las curvas de este haz la funcional $v[y(x, C_1)]$ se transforma en una función de C_1 y x_1. Si las curvas del haz $y = y(x, C_1)$ no se cortan en un entorno de la extremal considerada, entonces $v[y(x, C_1)]$ puede considerarse como función uniforme de x_1 e y_1, puesto que al dar x_1 y y_1 se determina la extremal del haz (fig. 7.1), y con esto se determina el valor de la funcional.

Calculemos la variación de la funcional $v[y(x, C_1)]$ en las extremales del haz $y = y(x, C_1)$ cuando el punto frontera se desplaza de la posición (x_1, y_1) a la $(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1)$. Puesto que la funcional v se transforma en función de x_1 e y_1 en las curvas del haz, su variación coincide con la diferencial de esta función. Separemos del

incremento Δv la parte lineal principal con respecto a δx_1 e δy_1:

$$\Delta v = \int_{x_0}^{x_1+\delta x_1} F(x,\ y+\delta y,\ y'+\delta y')\,dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x,\ y,\ y')\,dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x,\ y+\delta y,\ y'+\delta y')\,dx +$$

$$+ \int_{x_0}^{x_1} [F(x,\ y+\delta y,\ y'+\delta y') - F(x,\ y,\ y')]\,dx. \qquad (7.1)$$

El primer sumando del segundo miembro se transforma, mediante el teorema del valor medio, en:

$$\int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x,\ y+\delta y,\ y'+\delta y')\,dx = F|_{x=x_1+\theta\delta x_1}\delta x_1, \quad \text{donde} \quad 0 < \theta < 1.$$

En virtud de la continuidad de la función F, tendremos:

$$F|_{x=x_1+\theta\delta x_1} = F(x,\ y,\ y')|_{x=x_1} + \varepsilon_1,$$

donde $\varepsilon_1 \to 0$ cuando $\delta x_1 \to 0$ y $\delta y_1 \to 0$.

De esta manera,

$$\int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x,\ y+\delta y,\ y'+\delta y')\,dx = F(x,\ y,\ y')|_{x=x_1}\delta x_1 + \varepsilon_1\delta x_1.$$

El segundo sumando del segundo miembro de (7.1) se transforma desarrollando la función subintegral por la fórmula de Taylor:

$$\int_{x_0}^{x_1} [F(x,\ y+\delta y,\ y'+\delta y') - F(x,\ y,\ y')]\,dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} [F_y(x,\ y,\ y')\,\delta y + F_{y'}(x,\ y,\ y')\,\delta y']\,dx + R_1,$$

donde R_1 es un infinitésimo de orden mayor que δy o $\delta y'$. A su vez, la parte lineal

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_y\delta y + F_{y'}\delta y')\,dx$$

puede ser reducida, integrando por partes el segundo sumando de la función subintegral, a la forma

$$[F_{y'}\delta y]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y\,dx.$$

Los valores de la funcional se toman sólo en las extremales; por lo tanto, $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$. Como el punto frontera (x_0, y_0) está fijo, tenemos $\delta y|_{x=x_0} = 0$. Por consiguiente,

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_y\,\delta y + F_{y'}\delta y')\,dx = [F_{y'}\delta y]|_{x=x_1}.$$

Obsérvese que $\delta y|_{x=x_1}$ no es igual a δy_1, ya que δy_1 es el incremento de y_1 al desplazarse el punto frontera a la posición $(x_1+\delta x_1, y_1+\delta y_1)$, mientras que $\delta y|_{x=x_1}$ es el incremento de la ordenada en

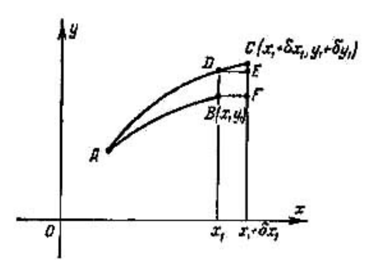


Fig. 7.2

el punto x_1 al pasar de la extremal que pasa por los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) a la extremal que pasa por los puntos (x_0, y_0) y $(x_1+\delta x_1, y_1+\delta y_1)$ (fig. 7.2).

Del dibujo se ve que $BD = \delta y|_{x=x_1}$; $FC = \delta y_1$;

$$EC \approx y'(x_1)\,\delta x_1; \quad BD = FC - EC$$

o bien

$$\delta y|_{x=x_1} \approx \delta y_1 - y'(x_1)\,\delta x_1.$$

Aquí la igualdad apoximada se cumple salvo un infinitésimo de orden mayor.

De este modo, tenemos definitivamente: $\int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F\,dx \approx F|_{x=x_1}\,\delta x_1$;

$$\int_{x_0}^{x_1} [F(x, y+\delta y, y'+\delta y') - F(x, y, y')]\,dx \approx F_{y'}|_{x=x_1}(\delta y_1 - y'(x_1)\,\delta x_1),$$

donde las igualdades aproximadas también se cumplen salvo infinitésimos de orden mayor que 1 con respecto a δx_1 y δy_1. Por lo

tanto, de (7.1) se obtiene

$$\delta v = F|_{x=x_1}\delta x_1 + F_{y'}|_{x=x_1}(\delta y_1 - y'(x_1)\delta x_1) = \\ = (F - y'F_{y'})|_{x=x_1}\delta x_1 + F_{y'}|_{x=x_1}\delta y_1,$$

o bien

$$d\bar{v}(x_1, y_1) = (F - y'F_{y'})|_{x=x_1} dx_1 + F_{y'}|_{x=x_1} dy_1,$$

donde $\bar{v}(x_1, y_1)$ es la función en que se transforma la funcional v en las extremales $y = y(x, C_1)$, y $dx_1 = \Delta x_1 = \delta x_1$, $dy_1 = \Delta y_1 = \delta y_1$ son los incrementos de las coordenadas del punto frontera. La condición necesaria fundamental de extremo $\delta v = 0$ toma la forma

$$(F - y'F_{y'})|_{x=x_1}\delta x_1 + F_{y'}|_{x=x_1}\delta y_1 = 0. \tag{7.2}$$

Si las variaciones δx_1 y δy_1 son independientes, de aquí se deduce que

$$(F - y'F_{y'})|_{x=x_1} = 0 \quad \text{y} \quad F_{y'}|_{x=x_1} = 0.$$

Sin embargo, con mayor frecuencia hay que considerar el caso en que las variaciones δx_1 y δy_1 son dependientes.

Supongamos, por ejemplo, que el segundo punto frontera (x_1, y_1) puede trasladarse por cierta línea

$$y_1 = \varphi(x_1).$$

Entonces $\delta y_1 \approx \varphi'(x_1)\delta x_1$ y, por lo tanto, la condición (7.2) toma la forma $[F + (\varphi' - y')F_{y'}]_{x=x_1}\delta x_1 = 0$, o bien, como δx_1 varía arbitrariamente, $[F + (\varphi' - y')F_{y'}]_{x=x_1} = 0$. Esta condición establece una dependencia entre los coeficientes angulares φ' e y' en el punto frontera, y se llama *condición de transversalidad*.

La condición de transversalidad, conjuntamtente con la condición $y_1 = \varphi(x_1)$, permite en general determinar una o varias extremales del haz $y = y(x, C_1)$, en las cuales puede alcanzarse el extremo. Si el punto frontera (x_0, y_0) puede trasladarse por cierta curva $y_0 = \psi(x_0)$, entonces se deduce, en forma completamente análoga, que en el punto (x_0, y_0) también debe satisfacerse la condición de transversalidad

$$[F + (\psi' - y')F_{y'}]_{x=x_0} = 0.$$

Ejemplo 1. Hallar la condicion de transversalidad para las funcionales del tipo

$$v = \int_{x_0}^{x_1} A(x, y)\sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

La condición de transversalidad $F + F_{y'}(\varphi' - y') = 0$ tiene en este caso la forma $A(x, y)\sqrt{1 + y'^2} + \frac{A(x, y)\,y'}{\sqrt{1 + y'^2}}(\varphi' - y') = 0$, o bien $\frac{A(x, y)(1 + \varphi'y')}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0$; supo-

niendo que $A(x, y) \neq 0$ en el punto frontera, obtenemos $1+y'\varphi'=0$, o bien $y'=-\frac{1}{\varphi'}$, es decir en este caso la condición de transversalidad se redujo a la de ortogonalidad.

Ejemplo 2. Analizar el extremo de la funcional $\int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}\,dx$, siendo $y(0)=0$, $y_1=x_1-5$ (fig. 7.3). Las curvas integrales de la ecuación de Euler (ejercicio 1, pág. 331) son las circunferencias $(x-C_1)^2+y^2=C_2^2$. La primera condición de frontera da $C_1=C_2$. Como la condición de transversalidad se reduce para la funcional considerada a la condición de ortogonalidad (véase el ejemplo anterior), entonces la recta $y_1=x_1-5$ debe ser diámetro de la circunferencia

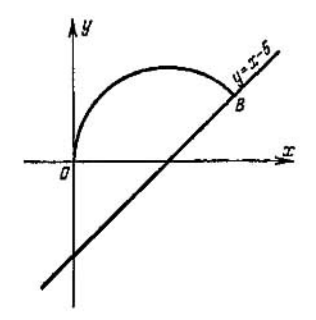


Fig. 7 3

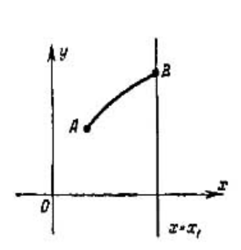


Fig 7.4

y, en consecuencia, el centro de la circunferencia buscada se encuentra en el punto (0.5) de intersección de la recta $y_1=x_1-5$ con el eje de las abscisas. Por lo tanto, $(x-5)^2+y^2=25$, o bien $y=\pm\sqrt{10x-x^2}$. De esta manera, el extremo puede alcanzarse sólo en los arcos de circunferencia $y=\sqrt{10x-x^2}$ e $y=-\sqrt{10x-x^2}$.

Si el punto frontera (x_1, y_1) puede desplazarse sólo por una recta vertical (fig. 7.4) y, por consiguiente, $\delta x_1=0$, la condición (7.2) se transforma en $F_{y'}|_{x=x_1}=0$.

Supongamos, por ejemplo, que en el problema de la braquistócrona (véase la pág. 311) el punto frontera izquierdo está fijo, y el derecho puede desplazarse por una recta vertical.

Las extremales de la funcional $v=\int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\,dx$ son cicloides, cuyas ecuaciones, si se toma en cuenta la condición $y(0)=0$, tendrán la forma

$$x=C_1(t-\operatorname{sen} t),$$
$$y=C_1(1-\cos t).$$

Para determinar C_1 se utiliza la condición $F_{y'}|_{x=x_1}=0$, que en este caso tiene

la forma

$$\left.\frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}}\right|_{x=x_1}=0,$$

de donde $y'(x_1)=0$, es decir, la cicloide buscada debe cortar la recta $x=x_1$ bajo un ángulo recto y, por lo tanto, el punto $x=x_1$, $y=y_1$ debe ser el vér-

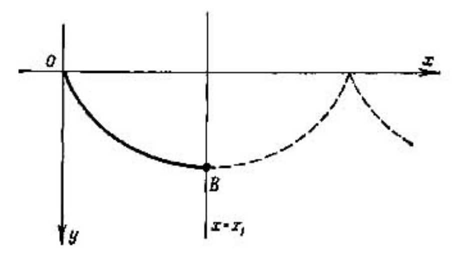


Fig. 7.5

tice de la cicloide (fig. 7.5). Puesto que al vértice le corresponde el valor $t=\pi$, entonces $x_1=C_1\pi$, $C_1=\frac{x_1}{\pi}$. Por lo tanto, el extremo puede realizarse sólo en la cicloide

$$x=\frac{x_1}{\pi}(t-\operatorname{sen} t);\quad y=\frac{x_1}{\pi}(1-\cos t).$$

Si el punto frontera (x_1, y_1) en el problema sobre el extremo de la funcional $v=\int\limits_{x_0}^{x_1}F(x, y, y')\,dx$ puede desplazarse por la recta horizontal $y=y_1$, entonces $\delta y_1=0$, y la condición (7.2), o condición de transversalidad, toma la forma

$$[F-y'F_{y'}]_{x=x_1}=0.$$

§ 2. PROBLEMA CON FRONTERAS MOVILES PARA LAS FUNCIONALES DE LA FORMA $\int\limits_{x_0}^{x_1}F(x, y, z, y', z')\,dx$

Si al investigar el extremo de la funcional

$$v=\int\limits_{x_0}^{x_1}F(x, y, z, y', z')\,dx$$

uno de los puntos frontera, por ejemplo $B(x_1, y_1, z_1)$, se desplaza y el otro, $A(x_0, y_0, z_0)$, es inmóvil (o ambos puntos frontera son móviles), es evidente que el extremo puede alcanzarse sólo en las

curvas integrales del sistema de ecuaciones de Euler

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0;\quad F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}=0.$$

En efecto, si en cierta curva C se realiza el extremo del problema con fronteras móviles, o sea, se alcanza un valor máximo o mínimo de v con respecto a sus valores en todas las curvas cercanas admisibles, entre las cuales hay tanto curvas que tengan puntos frontera comunes con la curva C que realiza el extremo, como curvas cuyos puntos frontera no coincidan con los puntos frontera de la curva C, entonces con mayor razón en la curva C se alcanza un extremo con respecto a la clase más restringida de curvas cercanas que tienen puntos frontera comunes con la curva C.

Por consiguiente, en la curva C deben satisfacerse las condiciones necesarias de extremo del problema con puntos frontera inmóviles y, en particular, la curva C debe ser curva integral del sistema de ecuaciones de Euler.

La solución general del sistema de ecuaciones de Euler contiene cuatro constantes arbitrarias. Conociendo las coordenadas del punto frontera $A(x_0, y_0, z_0)$, que consideraremos inmóvil, se pueden, en general, eliminar dos constantes arbitrarias.

Para determinar las otras dos constantes arbitrarias es necesario tener dos ecuaciones más, que serán obtenidas de la condición $\delta v=0$. Además, al calcular la variación consideraremos que la funcional se da sólo en las soluciones del sistema de ecuaciones de Euler, puesto que sólo en ellas se puede alcanzar el extremo. Entonces la funcional v se transforma en una función $\Phi(x_1, y_1, z_1)$ de las coordenadas x_1, y_1 y z_1 del punto $B(x_1, y_1, z_1)$, y la variación de la funcional se transforma en la diferencial de esta función*).

El cálculo de la variación de v puede realizarse en forma completamente igual a como se hizo en las págs. 335—338:

$$\Delta v=\int_{x_0}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\delta y, z+\delta z, y'+\delta y', z'+\delta z')\,dx-$$

$$-\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')\,dx=$$

$$=\int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\delta y, z+\delta z, y'+\delta y', z'+\delta z')\,dx+$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}[F(x, y+\delta y, z+\delta z, y'+\delta y', z'+\delta z')-F(x, y, z, y', z')]\,dx.$$

*) La función Φ será uniforme si las extremales del haz con centro en el punto A no se cortan, puesto que entonces el punto $B(x_1, y_1, z_1)$ determina unívocamente la extremal.

Apliquemos el teorema del valor medio a la primera integral y utilicemos la continuidad de la función F; tomemos en la segunda integral la parte lineal principal mediante la fórmula de Taylor. Después de estas transformaciones, se obtiene

$$\delta v = F|_{x=x_1}\delta x_1 + \int_{x_0}^{x_1} [F_y\delta y + F_z\delta z + F_{y'}\delta y' + F_{z'}\delta z']\,dx.$$

Integrando por partes los dos últimos sumandos que están bajo el símbolo integral, tendremos:

$$\delta v = F|_{x=x_1}\delta x_1 + [F_{y'}\delta y]_{x=x_1} + [F_{y'}\delta z]_{x=x_1} + \\ + \int_{x_0}^{x_1}\left[\left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y + \left(F_z - \frac{d}{dx}F_{z'}\right)\delta z\right]dx.$$

Como los valores de v se calculan sólo en las extremales, entonces

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} \equiv 0; \qquad F_z - \frac{d}{dx}F_{z'} \equiv 0$$

y por lo tanto,

$$\delta v = F|_{x=x_1}\delta x_1 + [F_{y'}\delta y]_{x=x'} + [F_{z'}\delta z]_{x=x_1}.$$

Razonando igual que en la pág. 337, se obtiene

$$\delta y|_{x=x_1} \approx \delta y_1 - y'(x_1)\,\delta x_1 \ \text{ y } \ \delta z|_{x=x_1} \approx \delta z_1 - z'(x_1)\,\delta x_1$$

y, en consecuencia,

$$\delta v = [F - y'F_{y'} - z'F_{z'}]_{x=x_1}\delta x_1 + F_{y'}|_{x=x_1}\delta y_1 + F_{z'}|_{x=x_1}\delta z_1 = 0.$$

Si las variaciones δx_1, δy_1 y δz_1 son independientes, entonces de la condición $\delta v = 0$ se obtiene

$$[F - y'F_{y'} - z'F_{z'}]_{x=x_1} = 0; \quad F_{y'}|_{x=x_1} = 0 \ \text{ y } \ F_{z'}|_{x=x_1} = 0.$$

Si el punto frontera $B(x_1, y_1, z_1)$ puede trasladarse por cierta curva $y_1 = \varphi(x_1)$; $z_1 = \psi(x_1)$, entonces $\delta y_1 = \varphi'(x_1)\,\delta x_1$ y $\delta z_1 = \psi'(x_1)\,\delta x_1$, y la condición $\delta v = 0$, o bien

$$[F - y'F_{y'} - z'F_{z'}]_{x=x_1}\delta x_1 + F_{y'}|_{x=x_1}\delta y_1 + F_{z'}|_{x=x_1}\delta z_1 = 0$$

se transforma en

$$[F + (\varphi' - y')\,F_{y'} + (\psi' - z')\,F_{z'}]_{x=x_1}\delta x_1 = 0$$

de donde, en virtud de la arbitrariedad de δx_1, obtenemos

$$[F + (\varphi' - y')\,F_{y'} + (\psi' - z')\,F_{z'}]_{x=x_1} = 0.$$

Esta condición se llama *condición de transversalidad* en el pro-

blema sobre la investigación del extremo de la funcional

$$v=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')\,dx.$$

La condición de transversalidad, conjuntamente con las ecuaciones $y_1=\varphi(x_1)$ y $z_1=\psi(x_1)$, da las ecuaciones que faltaban para determinar las constantes arbitrarias en la solución general del sistema de ecuaciones de Euler.

Si el punto frontera $B(x_1, y_1, z_1)$ puede desplazarse por cierta superficie $z_1=\varphi(x_1, y_1)$, entonces $\delta z_1=\varphi'_{x_1}\delta x_1+\varphi_{y_1}\delta y_1$, y las variaciones δx_1 y δy_1 son arbitrarias. Por lo tanto, la condición $\delta v=0$, o, en forma desarrollada,

$$[F-y'F_{y'}-z'F_{z'}]_{x=x_1}\delta x_1+F_{y'}|_{x=x_1}\delta y_1+F_{z'}|_{x=x_1}\delta z_1=0,$$

se reduce a la condición

$$[F-y'F_{y'}-z'F_{z'}+\varphi'_x F_{z'}]_{x=x_1}\delta x_1+[F_{y'}+F_{z'}\varphi'_y]_{x=x_1}\delta y_1=0.$$

De aquí, debido a la independencia de δx_1 y δy_1, se obtiene,

$$[F-y'F_{y'}+(\varphi'_x-z')F_{z'}]_{x=x_1}=0,\quad [F_{y'}+F_{z'}\varphi'_y]_{x=x_1}=0.$$

Estas dos condiciones, conjuntamente con la ecuación $z_1=\varphi(x_1, y_1)$, dan, en general, la posibilidad de determinar las dos constantes arbitrarias en la solución general del sistema de ecuaciones de Euler.

Si el punto frontera $A(x_0, y_0, z_0)$ es móvil entonces, por el mismo método, se obtienen en este punto condiciones completamente análogas.

Si se considera la funcional

$$v=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)\,dx,$$

entonces, sin cambiar el método de demostración, se obtiene que en el caso de que el punto $B(x_1, y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{n1})$ sea móvil, en este punto será

$$\Big(F-\sum_{i=1}^{n} y'_i F_{y'_i}\Big)\Big|_{x=x_1}\delta x_1+\sum_{i=1}^{n} F_{y'_i}\Big|_{x=x_1}\delta y_{i1}=0.$$

Ejemplo 1. Hallar la codición de transversalidad para la funcional

$$v=\int_{x_0}^{x_1} A(x, y, z)\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx,\quad \text{si}\quad z_1=\varphi(x_1, y_1).$$

Las condiciones de transversalidad

$$[F-y'F_{y'}+(\varphi'_x-z')F_{z'}]_{x=x_1}=0 \text{ y } [F_{y'}+F_{z'}\varphi'_y]_{x=x_1}=0$$

tienen en este caso la forma $1+\varphi'_x z'=0$ e $y'+\varphi'_y z'=0$ para $x=x_1$, o bien $\frac{1}{\varphi'_x}=\frac{y'}{\varphi'_y}=\frac{z'}{-1}$ para $x=x_1$, es decir, son las condiciones de paralelismo del vector tangente $\vec{t}\,(1,\ x',\ z')$ a la extremal buscada en el punto $(x_1,\ y_1,\ z_1)$, y del vector de la normal $\vec{N}\,(\varphi'_x,\ \varphi'_y,\ -1)$ a la superficie $z=\varphi(x,\ y)$ en dicho punto. Por consiguiente, la condición de transversalidad se reduce, en este caso, a la condición de ortogonalidad de la extremal a la superficie $z=\varphi(x,\ y)$.

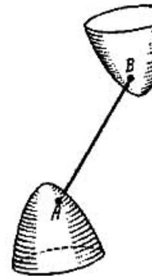
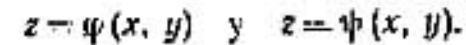


Fig 7.6

E j e m p l o 2. Hallar la distancia extremal entre las dos superficies



$$z=\varphi(x,\ y) \quad \text{y} \quad z=\psi(x,\ y).$$

En otras palabras, hallar el extremo de la integral $l=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx$ bajo la condición de que las coordenadas de uno de los puntos frontera, $(x_0,\ y_0,\ z_0)$, satisfagan la ecuación $z_0=\varphi(x_0,\ y_0)$, y las coordenadas del otro, $(x_1,\ y_1,\ z_1)$, la ecuación $z_1=\psi(x_1,\ y_1)$.

Como la función subintegral depende sólo de y' y z', las extremales son líneas rectas (véase el ejemplo 2 de la pág. 314). Como la funcional $\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx$ es un caso particular de la funcional $\int_{x_0}^{x_1}A(x,\ y,\ z)\times$ $\times\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx$, considerada en el ejemplo anterior, entonces las condiciones de transversalidad tanto en el punto $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ como en el $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ se reducen a las condiciones de ortogonalidad. Por lo tanto, el extremo puede alcanzarse sólo en las rectas ortogonales tanto a la superficie $z=\varphi(x,\ y)$ en el punto $(x_0,\ y_0,\ z_0)$, como a la superficie $z=\psi(x,\ y)$ en el punto $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ (fig. 7.6).

E j e m p l o 3. Investigar el extremo de la funcional $v=\int_{x_0}^{x_1}(y'^2+z'^2+2yz)\,dx$, siendo $y(0)=0$, $z(0)=0$ y pudiéndose desplazar el punto $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ por el plano $x=x_1$. El sistema de ecuaciones de Euler tiene la forma $z''-y=0$; $y''-z=0$, de donde $y^{IV}-y=0$; $y=C_1\operatorname{ch}x+C_2\operatorname{sh}x+C_3\cos x+C_4\operatorname{sen}x$; $z=y''$; $z=$ $=C_1\operatorname{ch}x+C_2\operatorname{sh}x-C_3\cos x-C_4\operatorname{sen}x$. De las condiciones $y(0)=0$ y $z(0)=0$ se obtiene: $C_1+C_3=0$ y $C_1-C_3=0$, de donde $C_1=C_3=0$. La condición en el punto frontera móvil

$$(F-y'F_{y'}-z'F_{z'})_{x=x_1}\delta x_1+F_{y'}|_{x=x_1}\delta y_1+F_{z'}|_{x=x_1}\delta z_1=0$$

se reduce a las condiciones

$$F_{y'}|_{x=x_1}=0 \text{ y } F_{z'}|_{x=x_1}=0,$$

puesto que $\delta x_1=0$, y δy_1 y δz_1 son arbitrarios. En el caso considerado $F_{y'}=2y'$; $F_{z'}=2z'$; por lo tanto,

$$y'(x_1)=0 \quad \text{y} \quad z'(x_1)=0,$$

o bien

$$C_2\operatorname{ch}x_1+C_4\cos x_1=0 \quad \text{y} \quad C_2\operatorname{ch}x_1-C_4\cos x_1=0.$$

Si $\cos x_1 \neq 0$, entonces $C_2 = C_4 = 0$ y el extremo puede alcanzarse sólo en la recta $y=0$; $z=0$. Si, en cambio, $\cos x_1 = 0$, o sea, $x_1 = \frac{\pi}{2} + n\pi$, donde n es un entero, entonces $C_2 = 0$, C_4 es una constante arbitraria, $x = C_4 \operatorname{sen} x$, $z = -C_4 \operatorname{sen} x$. No es difícil comprobar que en el último caso para cualquier C_4 la funcional $v=0$.

§ 3. EXTREMALES CON PUNTOS ANGULARES

Hasta ahora hemos considerado problemas variacionales en los cuales la función buscada $y=y(x)$ se suponía continua y con derivada continua. Sin embargo, en muchos problemas la última exigencia no es natural; es más, en ciertas clases de problemas variacionales la solución se alcanza por lo general en extremales que tienen puntos angulares. A estos problemas pertenecen, por ejemplo, los problemas sobre la reflexión y sobre la refracción de las extremales, que son una generalización de los problemas correspondientes sobre la reflexión y refracción de la luz.

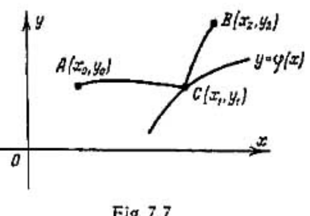


Fig 7.7

Problema de la reflexión de las extremales. Hallar la curva que realice el extremo de la funcional $v = \int_{x_0}^{x_2} F(x, y, y')\,dx$ y que pase por dos puntos dados $A(x_0, y_0)$ y $B(x_2, y_2)$; además la curva debe caer en el punto B sólo después de reflejarse en una línea dada $y=\varphi(x)$ (fig. 7.7).

Es natural suponer que en el punto de reflexión $C(x_1, y_1)$ pueda haber un punto angular de la extremal buscada y, por lo tanto, que en este punto la derivada izquierda $y'(x_1-0)$ y la derivada derecha $y'(x_1+0)$ en general sean diferentes. Por esto, es más cómodo representar la funcional $v[y(x)]$ en la forma

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx + \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx;$$

en cada intervalo $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ y $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ la derivada $y'(x)$ se supone continua y, en consecuencia, se pueden aplicar los resultados obtenidos antes.

La condición necesaria fundamental de extremo $\delta v=0$ toma la forma

$$\delta v=\delta\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx+\delta\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx=0.$$

Como el punto (x_1, y_1) puede desplazarse por la curva $y=\varphi(x)$, al calcular las variaciones $\delta\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$ y $\delta\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx$ nos encontramos en las condiciones del problema con un punto frontera móvil, que se mueve por una curva dada, y podemos aplicar los resultados del § 1 (pág. 334). Es evidente que las curvas AC y CB son extremales. En efecto, en estos segmentos $y=y(x)$ es solución de la ecuación de Euler, ya que si consideramos que una de estas curvas ya fue hallada y variamos la otra, el problema se reduce a hallar el extremo de la funcional $\int_{x_0}^{x_1} F\,dx$ (o bien $\int_{x_1}^{x_2} F\,dx$) en el problema con puntos frontera fijos. Por esto, calculando la variación de la funcional supondremos ya que ésta se considera sólo en las extremales que tienen el punto angular C. Entonces

$$\delta\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx=[F+(\varphi'-y')F_{y'}]_{x=x_1-0}\,\delta x_1$$

y

$$\delta\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx=-[F+(\varphi'-y')F_{y'}]_{x=x_1+0}\,\delta x_1$$

(véase la pág. 338), donde los símbolos $x=x_1-0$ y $x=x_1+0$ significan que se toma el límite de las magnitudes entre paréntesis al tender al punto x_1 en el primer caso por la izquierda (por el lado de los valores de x menores que x_1), y en el segundo caso por la derecha (por el lado de los valores de x mayores que x_1). Como en el punto de reflexión es discontinua sólo la derivada y', entonces en el primer caso hay que tomar la derivada izquierda en el punto angular, y en el segundo caso, la derivada derecha.

La condición $\delta v=0$ toma la forma

$$[F+(\varphi'-y')F_{y'}]_{x=x_1-0}\,\delta x_1-[F+(\varphi'-y')F_{y'}]_{x=x_1+0}\,\delta x_1=0$$

o, como δx_1 varía en forma arbitraria, entonces

$$[F+(\varphi'-y')F_{y'}]_{x=x_1-0}=[F+(\varphi'-y')F_{y'}]_{x=x_1+0},$$

o bien

$$F(x_1,\ y_1,\ y'(x_1-0)) +$$
$$+(\varphi'(x_1)-y'(x_1-0))F_{y'}(x_1,\ y_1,\ y'(x_1-0)) = F(x_1,\ y_1,\ y'(x_1+0)) +$$
$$+(\varphi'(x_1)-y'(x_1+0))\,F_{y'}(x_1,\ y_1,\ y'(x_1+0)).$$

Esta condición de reflexión toma una forma especialmente simple para las funcionales de la forma

$$v=\int_{x_0}^{x_1} A(x,\ y)\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

más precisamente:

$$A(x_1,\ y_1)\left[\sqrt{1+y'^2}+\frac{(\varphi'-y')\,y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right]_{x=x_1-0}=$$
$$=A(x_1,\ y_1)\left[\sqrt{1+y'^2}+\frac{(\varphi'-y')\,y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right]_{x=x_1+0}$$

o bien, simplificando y dividiendo entre $A(x_1,\ y_1)$, bajo la hipótesis de que $A(x_1,\ y_1)\neq 0$,

$$\left.\frac{1+\varphi'y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right|_{x=x_1-0}=\left.\frac{1+\varphi'y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right|_{x=x_1+0}.$$

Designando por la letra α al ángulo entre la tangente a la curva $y=\varphi(x)$ y el eje de las abscisas, y por β_1 y β_2 respectivamente

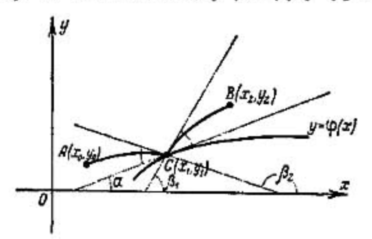


Fig 7.8

a los ángulos de inclinación con respecto al eje de las abscisas de las tangentes izquierda y derecha a la extremal en el punto C de reflexión (fig. 7.8), obtenemos

$$y'(x_1-0)=\operatorname{tg}\beta_1,\quad y'(x_1+0)=\operatorname{tg}\beta_2;\quad \varphi'(x_1)=\operatorname{tg}\alpha.$$

La condición en el punto de reflexión toma la forma

$$\frac{1+\operatorname{tg}\alpha\,\operatorname{tg}\beta_1}{\sec\beta_1}=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta_2}{\sec\beta_2}$$

o, después de simplificar y multiplicar por $\cos\alpha$:

$$-\cos(\alpha-\beta_1)=\cos(\alpha-\beta_2).$$

De aquí se deduce la igualdad de los ángulos de incidencia y de reflexión.

Si el punto se mueve en cierto medio con velocidad $v(x, y)$, el tiempo t que transcurre al desplazarse un punto desde la posición $A(x_0, y_0)$ hasta la $B(x_1, y_1)$ es igual a la integral $\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(x, y)}dx$, que pertenece al tipo de funcionales consideradas $\int_{x_0}^{x_1}A(x, y)\sqrt{1+y'^2}dx$ y, por lo tanto, para cualquier ley de variación de la velocidad $v(x, y)$, en el punto de reflexión el ángulo de incidencia es igual al de reflexión.

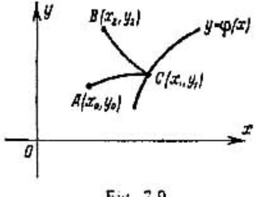


Fig. 7.9

Si los puntos A, B y C estuvieran distribuidos de otro modo, por ejemplo como en la fig. 7.9, entonces para obtener la misma condición en el punto de reflexión sería más cómodo realizar el

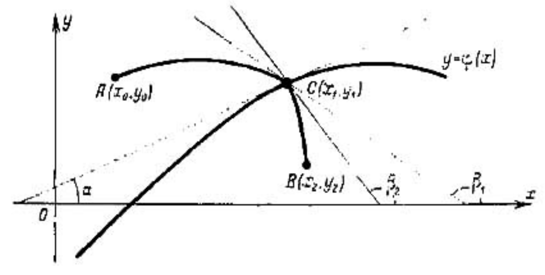


Fig. 7.10

análisis en forma paramétrica, debido a que la función $y=y(x)$ es multiforme.

Refracción de las extremales. Supongamos que la función subintegral de la funcional $v=\int_{x_0}^{x_2}F(x, y, y')\,dx$ en la región considerada tiene una línea de discontinuidad $y=\varphi(x)$, y los puntos frontera A y B están situados a distintos lados de dicha línea (fig. 7.10).

Representemos la funcional v en la forma

$$v=\int_{x_0}^{x_1} F_1(x,\ y,\ y')\,dx+\int_{x_1}^{x_2} F_2(x,\ y,\ y')\,dx,$$

donde $F_1(x,\ y,\ y')=F(x,\ y,\ y')$ de un lado de la línea de discontinuidad, y $F_2(x,\ y,\ y')=F(x,\ y,\ y')$ del otro lado de la misma.

Supongamos que F_1 y F_2 son derivables tres veces. En el punto C de intersección de la curva buscada con la línea de discontinuidad es natural esperar que haya un punto angular. Los arcos AC y CB son evidentemente extremales (esto se deduce, nuevamente, de que al fijar uno de estos arcos y variar sólo el otro, se obtiene un problema con puntos frontera fijos). Por esto, se pueden tomar como curvas de comparación sólo quebradas compuestas por dos arcos de extremal; entonces la variación, en virtud de que el punto frontera $C(x_1,\ y_1)$ puede desplazarse por la curva $y=\varphi(x)$, toma la forma siguiente (véase la pág. 338):

$$\delta v=\delta\int_{x_0}^{x_1} F_1(x,\ y,\ y')\,dx+\delta\int_{x_1}^{x_2} F_2(x,\ y,\ y')\,dx=$$

$$=[F_1+(\varphi'-y')F_{1y'}]_{x=x_1-0}\,\delta x_1-[F_2+(\varphi'-y')F_{2y'}]_{x=x_1+0}\,\delta x_1,$$

y la condición necesaria fundamental de extremo $\delta v=0$ se reduce a la igualdad

$$[F_1+(\varphi'-y')F_{1y'}]_{x=x_1-0}=[F_2+(\varphi'-y')F_{2y'}]_{x=x_1+0}.$$

Como en el punto de refracción puede ser discontinua sólo y', entonces esta condición de refracción puede escribirse también en la forma siguiente:

$$F_1(x_1,\ y_1,\ y'(x_1-0))+$$
$$+(\varphi'(x_1)-y'(x_1-0))F_{1y'}(x_1,\ y_1,\ y'(x_1-0))=$$
$$=F_2(x_1,\ y_1,\ y'(x_1+0))+$$
$$+(\varphi'(x_1)-y'(x_1+0))F_{2y'}(x_1,\ y_1,\ y'(x_1+0)).$$

Esta condición de refracción, conjuntamente con la ecuación $y_1=\varphi(x_1)$, da la posibilidad de determinar las coordenadas del punto C.

Si, en particular, la funcional v es igual a

$$\int_{x_0}^{x_2} A(x,\ y)\sqrt{1+y'^2}\,dx=$$

$$=\int_{x_0}^{x_1} A_1(x,\ y)\sqrt{1+y'^2}\,dx+\int_{x_1}^{x_2} A_2(x,\ y)\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

entonces la condición de refracción toma la forma

$$A_1(x,\ y)\frac{1+\varphi'y'}{\sqrt{1+y'^2}}\bigg|_{x=x_1-0}=A_2(x,\ y)\frac{1+\varphi'y'}{\sqrt{1+y'^2}}\bigg|_{x=x_1+0},$$

o bien, conservando las notaciones de las págs. 347—348, $y'(x_1-0)=\operatorname{tg}\beta_1$, $y'(x_1+0)=\operatorname{tg}\beta_2$, $\varphi'(x_1)=\operatorname{tg}\alpha$, después de simplificar y multiplicar por $\cos\alpha$, tendremos:

$$\frac{\cos(\alpha-\beta_1)}{\cos(\alpha-\beta_2)}=\frac{A_2(x_1,\ y_1)}{A_1(x_1,\ y_1)}\ \text{o bien}\ \frac{\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta_1)\right]}{\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta_2)\right]}=\frac{A_2(x_1,\ y_1)}{A_1(x_1,\ y_1)},$$

lo cual es una generalización de la conocida ley de refracción de la luz: la razón entre el seno del ángulo de incidencia y el seno del de refracción es igual a la razón entre las velocidades

$$v_1(x,\ y)=\frac{1}{A_1(x,\ y)}\quad \text{y}\quad v_2(x,\ y)=\frac{1}{A_2(x,\ y)}\ \text{(cfr. la pág. 348)}$$

en los medios en cuya frontera tiene lugar la refracción.

No debe pensarse que las extremales con puntos angulares aparecen sólo en los problemas de reflexión o refracción de extremales. El extremo puede alcanzarse en extremales con puntos angulares aún en los problemas sobre el extremo de la funcional $v=\int_{x_0}^{x_1}F(x,\ y,\ y')\,dx$, donde la función F es derivable tres veces, y las curvas admisibles deben pasar por los puntos frontera A y B, sin ninguna clase de condiciones adicionales.

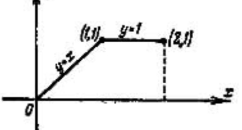


Fig. 7.11

Estudiemos, por ejemplo, la funcional

$$v=\int_0^2 y'^2(1-y')^2\,dx;\ y(0)=0,\ y(2)=1.$$

Como la función subintegral es positiva, entonces $v\geqslant 0$ y, por lo tanto, si en cierta curva la funcional $v=0$, entonces en esta curva se realiza con seguridad un mínimo absoluto de esta funcional, es decir, el valor mínimo de la funcional en las curvas admisibles. No es difícil ver que en la quebrada $y=x$ cuando $0\leqslant x\leqslant 1$, $y=1$ para $1<x\leqslant 2$ (fig. 7.11) la funcional $v=0$, ya que en esta quebrada la función subintegral es idénticamente nula. Por consiguiente, en esta quebrada se realiza un mínimo absoluto de la funcional.

El mínimo absoluto de la funcional $v=0$ se alcanza también en las líneas quebradas representadas en la fig. 7.13. Por otra parte, es fácil ver que en las curvas lisas *) los valores de la funcional son estrictamente mayores que cero, a pesar de que puedan hacerse infinitamente próximos a cero. En efecto, la función subintegral se anula sólo cuando $y=x+C_1$ o cuando $y=C_2$; pero las líneas formadas por segmentos de rectas de estas familias que pasan por los puntos $A(0, 0)$ y $B(2, 1)$ pueden ser sólo quebradas. Sin embargo, "alisando" los puntos angulares mediante la variación correspondiente de la función en un entorno arbitrariamente pequeño de estos puntos, se puede obtener una curva lisa en la cual el valor de la funcional se diferencie arbitrariamente poco del valor de ésta en la quebrada. De este modo, $v=0$ es la cota inferior de los valores de la funcional v en las curvas lisas; pero esta cota inferior no se alcanza en las curvas lisas, sino en las curvas lisas a trozos.

Hallemos las condiciones que deben satisfacer las soluciones con puntos angulares del problema sobre el extremo de la funcional $v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_2} F(x, y, y')\,dx$. Es evidente que los arcos lisos que forman la extremal quebrada deben ser curvas integrales de la ecuación de Euler. Esto se deduce de que si fijamos todos los segmentos de la quebrada, a excepción de uno, y variamos sólo éste, el problema se reduce al problema simple con fronteras fijas y, por lo tanto, este segmento debe ser un arco de extremal.

Suponiendo, para simplificar la escritura, que la extremal quebrada tiene sólo un punto angular **), hallemos las condiciones que deben satisfacerse en dicho punto:

$$v=\int_{x_0}^{x_2} F(x, y, y')\,dx=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx+\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx,$$

donde x_1 es la abscisa del punto angular (fig. 7.12). Considerando que las curvas AC y CB son curvas integrales de la ecuación de Euler, y que el punto C puede desplazarse arbitrariamente, obtenemos, de acuerdo con el § 1, pág. 338:

$$\delta v=(F-y'F_{y'})|_{x=x_1-0}\,\delta x_1+$$
$$+F_{y'}|_{x=x_1-0}\,\delta y_1-(F-y'F_{y'})|_{x=x_1+0}\,\delta x_1-F_{y'}|_{x=x_1+0}\,\delta y_1=0,$$

*) Véase la nota al pie de la pág. 24 (*N. de la Red.*)

**) Si hay varios puntos angulares, entonces a cada uno de ellos se le puede aplicar el mismo razonamiento.

de donde

$$(F-y'F_{y'})|_{x=x_1-0}\,\delta x_1+F_{y'}|_{x=x_1-0}\,\delta y_1=$$
$$=(F-y'F_{y'})|_{x=x_1+0}\,\delta x_1+F_{y'}|_{x=x_1+0}\,\delta y_1,$$

o bien, como δx_1 y δy_1 son independientes, tendremos

$$(F-y'F_{y'})|_{x=x_1-0}=(F-y'F_{y'})|_{x=x_1+0}$$

y

$$F_{y'}|_{x=x_1-0}=F_{y'}|_{x=x_1+0}.$$

Estas condiciones, conjuntamente con las condiciones de continuidad de la extremal buscada, permiten determinar las coordenadas del punto angular.

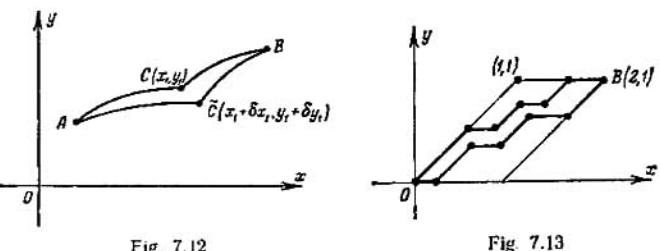


Fig. 7.12

Fig. 7.13

Ejemplo 1. Hallar las extremales quebradas (si existen) de la funcional $v=\int_0^a (y'^2-y^2)\,dx$. Escribimos la segunda condición que debe cumplirse en el punto angular, $F_{y'}/_{x=x_1-0}=F_{y'}/_{x=x_1+0}$, en este caso, $2y'(x_1-0)=2y'(x_1+0)$, de donde $y'(x_1-0)=y'(x_1+0)$, o sea que la derivada y' es continua en el punto x_1, y en el punto angular no. Por consiguiente, en el problema considerado el extremo puede alcanzarse sólo en las curvas lisas.

Ejemplo 2. Hallar las extremales quebradas de la funcional $v=\int_{x_0}^{x_2} y'^2(1-y')^2\,dx$. Como la función subintegral depende sólo de y', entonces las extremales son líneas rectas: $y=Cx+\overline{C}$ (véase la pág. 308). Las condiciones en el punto angular toman en este caso la forma

$$-y'^2(1-y')(1-3y')|_{x=x_1-0}=-y'^2(1-y')(1-3y')|_{x=x_1+0}$$

y

$$2y'(1-y')(1-2y')|_{x=x_1-0}=2y'(1-y')(1-2y')|_{x=x_1+0}.$$

Estas condiciones, excluyendo la posibilidad trivial de que

$$y'(x_1-0)=y'(x_1+0),$$

se satisfacen cuando

$$y'(x_1-0)=0$$

e

$$y'(x_1+0)=1,$$

o bien

$$y'(x_1-0)=1$$

e

$$y'(x_1+0)=0.$$

Por lo tanto, las extremales quebradas se pueden componer sólo de segmentos de recta pertenecientes a las familias $y=C_1$, e $y=x+C_2$ (fig. 7.13).

§ 4. VARIACIONES UNILATERALES

En ciertos problemas variacionales sobre el extremo de la funcional $v[y(x)]$ pueden imponerse limitaciones a la clase de curvas admisibles que les impida pasar por los puntos de cierta

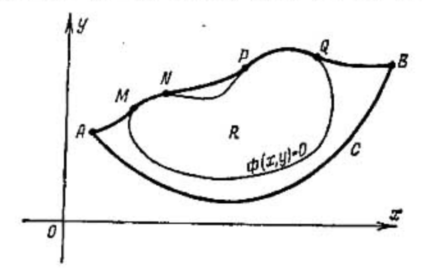


Fig. 7.14

región R, limitada por la curva $\Phi(x, y)=0$ (fig. 7.14). En estos problemas, la curva C que realiza el extremo o bien pasa enteramente fuera de la frontera de la región R, y entonces debe ser extremal — puesto que en este caso la región prohibida R no influye en absoluto en las propiedades de la funcional y de su variación en un entorno de la curva C, y los razonamientos del capítulo 6 siguen siendo válidos —, o bien la curva C se compone de arcos que se hallan fuera de la frontera de R y de partes de dicha frontera. En este último caso surge una nueva situación: en las partes de la frontera de la región R son posibles sólo variaciones unilaterales de la curva C, ya que las curvas admisibles no pueden penetrar dentro de la región. Las partes de la curva que se encuentran fuera de la frontera de la región R deben ser, como antes, extremales, puesto que si variamos la curva C

sólo en este intervalo, que permite variaciones bilaterales, la región R no influirá en la variación de y, y las deducciones del capítulo 6 seguirán siendo válidas.

De este modo, en el problema considerado el extremo puede alcanzarse sólo en las curvas compuestas por arcos de extremales y por partes de la frontera de la región R. Por consiguiente, para construir la curva buscada que realiza el extremo, hay que obtener las condiciones en los puntos de paso de la extremal a la frontera de la región R que permitan determinar estos puntos. En el caso

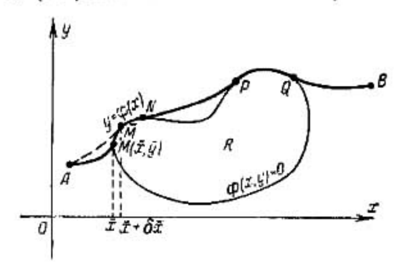


Fig 7.15

representado en la fig. 7.15, deben obtenerse las condiciones en los puntos M, N, P y Q. Obtengamos, por ejemplo, la condición en el punto M. Se podrían obtener análogamente las condiciones en los demás puntos de paso de la extremal a la frontera de la región.

Al calcular la variación δv de la funcional

$$v=\int_{x_0}^{x_1} F(x,\ y,\ y')\,dx=\int_{x_0}^{\bar{x}} F(x,\ y,\ y')\,dx+\int_{\bar{x}}^{x_1} F(x,\ y,\ y')\,dx$$

se puede considerar que la variación se efectúa sólo por el desplazamiento del punto $M(\bar{x},\ \bar{y})$ por la curva $\Phi(x,\ y)=0$, o sea, se puede considerar que para cualquier posición del punto M en la curva $\Phi(x,\ y)=0$ el arco AM ya es extremal, y el segmento $MNPQB$ no se varía. La funcional

$$v_1=\int_{x_0}^{\bar{x}} F(x,\ y,\ y')\,dx$$

tiene un punto frontera móvil que se desplaza por la frontera de la región R, cuya ecuación es $\Phi(x,\ y)=0$, o bien en forma resuelta — en un entorno del punto M — con respecto a y: $y=\varphi(x)$.

Por lo tanto, de acuerdo con el § 1 (pág. 338)

$$\delta v_1 = [F + (\varphi' - y') F_{y'}]_{x=\bar{x}}\, \delta \bar{x}.$$

La funcional $v_2 = \int_{\bar{x}}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$ también tiene un punto frontera móvil $(\bar{x}, \bar{y})$. Sin embargo, en un entorno de este punto la curva $y = \varphi(x)$, en la cual puede alcanzarse el extremo, no se varía. Por lo tanto, el cambio de la funcional v_2, al desplazarse el punto $(\bar{x}, \bar{y})$ a la posición $(\bar{x} + \delta\bar{x}, \bar{y} + \delta\bar{y})$, se reduce sólo al cambio del límite inferior de integración, y

$$\Delta v_2 = \int_{\bar{x}+\delta\bar{x}}^{x_1} F(x, y, y')\,dx - \int_{\bar{x}}^{x_1} F(x, y, y')\,dx =$$

$$= -\int_{\bar{x}}^{\bar{x}+\delta\bar{x}} F(x, y, y')\,dx = -\int_{\bar{x}}^{\bar{x}+\delta\bar{x}} F(x, \varphi(x), \varphi'(x))\,dx,$$

puesto que en el intervalo $(\bar{x}, \bar{x} + \delta\bar{x})$ es $y = \varphi(x)$.

Aplicando el teorema del valor medio y la continuidad de la función F, se obtiene

$$\Delta v_2 = -F(x, \varphi(x), \varphi'(x))\big|_{x=\bar{x}}\, \delta\bar{x} + \beta \cdot \delta\bar{x},$$

donde $\beta \to 0$ cuando $\delta\bar{x} \to 0$.

Por lo tanto, $\delta v_2 = -F(x, \varphi(x), \varphi'(x))\big|_{x=\bar{x}}\, \delta\bar{x}$,

$$\delta v = \delta v_1 + \delta v_2 =$$

$$= [F(x, y, y') + (\varphi' - y') F_{y'}(x, y, y')]_{x=\bar{x}}\, \delta\bar{x} -$$

$$- F(x, y, \varphi')\big|_{x=\bar{x}}\, \delta\bar{x} = [F(x, y, y') - F(x, y, \varphi') -$$

$$-(y' - \varphi') F_{y'}(x, y, y')]_{x=\bar{x}}\, \delta\bar{x},$$

ya que $y(\bar{x}) = \varphi(\bar{x})$.

La condición necesaria de extremo $\delta v = 0$, debido a la arbitrariedad de $\delta\bar{x}$, toma la forma

$$[F(x, y, y') - F(x, y, \varphi') - (y' - \varphi') F_{y'}(x, y, y')]_{x=\bar{x}} = 0.$$

Aplicando el teorema del valor medio, obtenemos

$$(y' - \varphi')\,[F_{y'}(x, y, q) - F_{y'}(x, y, y')]_{x=\bar{x}} = 0,$$

donde q es un valor intermedio entre $\varphi'(\bar{x})$ e $y'(\bar{x})$. Aplicando nuevamente el teorema del valor medio, tendremos

$$(y' - \varphi')(q - y')\, F_{y'y'}(x, y, \bar{q})\big|_{x=\bar{x}} = 0,$$

donde $\bar{q}$ es un valor intermedio entre q e $y'(\bar{x})$. Supongamos que

$F_{y'y'}(x, y, \bar{q}) \neq 0$. Esta hipótesis es natural para muchos problemas variacionales (véase el capítulo 8). En este caso, la condición en el punto M tiene la forma $y'(\bar{x}) = \varphi'(\bar{x})$ ($\bar{q} = y'$ sólo cuando $y'(\bar{x}) = \varphi'(\bar{x})$, puesto que $\bar{q}$ es un valor intermedio entre $y'(\bar{x})$ y $\varphi'(\bar{x})$).

Por lo tanto, en el punto M la extremal AM y la curva de frontera MN tienen una tangente común (la tangente izquierda para la curva $y = y(x)$, y la derecha para la curva $y = \varphi(x)$). De este modo, *la extremal es tangente a la frontera de la región R en el punto M.*

EJERCICIOS DEL CAPITULO 7

1. Hallar la solución con un punto angular del problema sobre el mínimo de la funcional

$$v[y(x)] = \int_0^4 (y'-1)^2 (y'+1)^2 \, dx; \quad y(0) = 0; \quad y(4) = 2.$$

2. ¿Existen soluciones con puntos angulares en el problema sobre el extremo de la funcional

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y'^2 + 2xy - y^2) \, dx, \quad y(x_0) = y_0; \quad y(x_1) = y_1 ?$$

3. ¿Existen soluciones con puntos angulares en el problema sobre el extremo de la funcional

$$v[y(x)] = \int_0^{x_1} (y'^4 - 6y'^2) \, dx; \quad y(0) = 0; \quad y(x_1) = y_1 ?$$

4. Hallar la condición de transversalidad para la funcional

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} A(x, y) \, e^{\operatorname{arctg} y'} \sqrt{1 + y'^2} \, dx, \quad A(x, y) \neq 0.$$

5. Aplicando la condición necesaria fundamental de extremo $\delta v = 0$, hallar la función en la cual puede alcanzarse un extremo de la funcional

$$v[y(x)] = \int_0^1 (y''^2 - 2xy) \, dx; \quad y(0) = y'(0) = 0;$$

$$y(1) = \frac{1}{120}; \quad y'(1) \text{ no está dado.}$$

6. Hallar las curvas en las cuales puede alcanzarse un extremo de la funcional

$$v[y(x)] = \int_0^{10} y'^3 dx; \quad y(0) = 0; \quad y(10) = 0$$

con la condición de que las curvas admisibles no puedan penetrar dentro del círculo delimitado por la circunferencia

$$(x-5)^2+y^2=9.$$

7. Hallar la función en la cual puede alcanzarse un extremo de la funcional

$$v[y(x)]=\int_0^{\pi/4}(y^2-y'^2)\,dx; \qquad y(0)=0,$$

si el otro punto frontera puede deslizarse por la recta $x=\frac{\pi}{4}$.

8. Aplicando sólo la condición necesaria fundamental $\delta v=0$, hallar la curva en la cual puede alcanzarse un extremo de la funcional

$$v[y(x)]=\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}\,dx; \ y(0)=0,$$

si el segundo punto frontera (x_1, y_1) puede desplazarse por la circunferencia $(x-9)^2+y^2=9$.

CAPITULO 8

Condiciones suficientes de extremo

§ 1. CAMPO DE EXTREMALES

Si en el plano (x, y) por cada punto de cierta región D pasa una y sólo una curva de la familia $y=y(x, C)$, se dice que esta familia de curvas forma un campo en la región D, o, más exactamente, un campo propio. El coeficiente angular de la tangente $p(x, y)$ a la curva de la familia $y=y(x, C)$ que pasa por el punto (x, y) se llama *inclinación (o declive) del campo* en el punto (x, y).

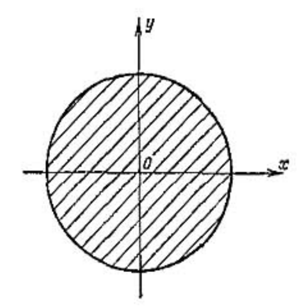
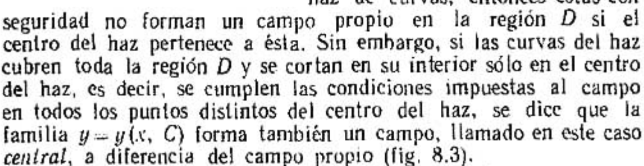


Fig. 8.1

Por ejemplo, las rectas paralelas $y=x+C$ forman un campo dentro del circulo $x^2+y^2\leqslant 1$ (fig. 8.1), y su inclinación es $p(x, y)=1$. Por el contrario, la familia de parábolas $y=(x-a)^2-1$ (fig. 8.2) no forma un campo dentro del mismo círculo, debido a que en su interior las parábolas de la familia considerada se cortan.

Si todas las curvas de la familia $y=y(x, C)$ pasan por cierto punto (x_0, y_0), es decir, forman un haz de curvas, entonces éstas con



seguridad no forman un campo propio en la región D si el centro del haz pertenece a ésta. Sin embargo, si las curvas del haz cubren toda la región D y se cortan en su interior sólo en el centro del haz, es decir, se cumplen las condiciones impuestas al campo en todos los puntos distintos del centro del haz, se dice que la familia $y=y(x, C)$ forma también un campo, llamado en este caso *central*, a diferencia del campo propio (fig. 8.3).

Por ejemplo, el haz de sinusoides $y=C\operatorname{sen} x$ forma un campo central para $0\leqslant x\leqslant a$, $a<\pi$ (fig. 8.4). El mismo haz de sinusoides forma un campo propio en un entorno suficientemente pequeño del segmento $\delta\leqslant x\leqslant a$ del eje de las abscisas, donde $\delta>0$, $a<\pi$

(fig. 8.4). El mismo haz de sinusoides no forma campo en un entorno del segmento $0 \leqslant x \leqslant a_1$, $a_1 > \pi$, del eje de las abscisas (fig. 8.4).

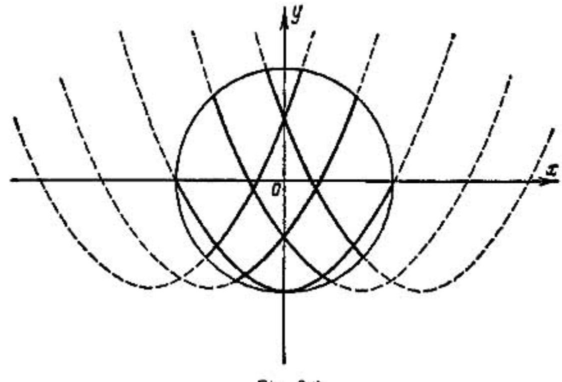


Fig. 8.2

Si un campo central o propio está formado por una familia de extremales de cierto problema variacional, se llama *campo de extremales*.

El concepto de campo se generaliza casi sin modificaciones también al caso de un espacio de cualquier dimensión. La familia $y_i = y_i(x, C_1, \ldots, C_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ forma un campo en la región D del espacio $x, y_1, \ldots, y_n$,

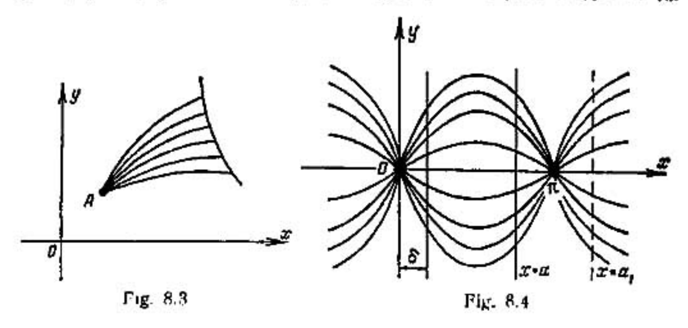


Fig. 8.3 Fig. 8.4

si por cada punto de dicha región pasa una y sólo una curva de la familia $y_i = y_i$ $(x, C_1, \ldots, C_n)$. Se llaman *funciones de inclinación* del campo $p_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ a las derivadas parciales de las funciones

$y_i(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ con respecto a x, calculadas en el punto $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$; por consiguiente, para obtener $p_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ hay que tomar $\frac{\partial}{\partial x} y_i(x, C_1, C_2, \ldots C_n)$ y sustituir $C_1, C_2, \ldots, C_n$ por sus expresiones mediante las coordenadas $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$. En forma análoga se define también el campo central.

Supongamos que la curva $y = y(x)$ es extremal del problema variacional sobre el extremo de la funcional simple

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx$$

con puntos frontera $A(x_0, y_0)$ y $B(x_1, y_1)$ fijos. Se dice que la extremal $y = y(x)$ está incluida en un campo de extremales, si ha sido dada una familia de extremales $y = y(x, C)$ que forma un campo,

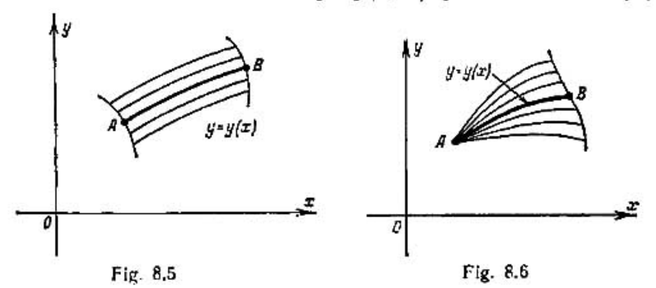


Fig. 8.5 Fig. 8.6

contiene a la extremal $y = y(x)$ para cierto valor $C = C_0$ y dicha extremal no pertenece a la frontera de la región D en la cual la familia $y = y(x, C)$ forma un campo (fig. 8.5). Si el haz de extremales con centro en el punto $A(x_0, y_0)$ forma un campo en un entorno de la extremal $y = y(x)$, que pasa por este punto, entonces con esto se halla un campo central que contiene a la extremal dada $y = y(x)$. Como parámetro de la familia se puede tomar en este caso el coeficiente angular de la tangente a las curvas del haz en el punto $A(x_0, y_0)$ (fig. 8.6).

E j e m p l o 1. Se da la funcional

$$\int_0^a (y'^2 - y^2)\, dx;$$

se pide incluir el segmento de la extremal $y = 0$ que une los puntos $(0, 0)$ y $(a, 0)$, donde $0 < a < \pi$, en un campo central de extremales. La solución

general de la ecuación de Euler $y''+y=0$ (véase la pág. 305, ejemplo 1) tiene la forma $y=C_1\cos x+C_2\operatorname{sen} x$. De la condición de que las extremales pasen por el punto (0, 0) se obtiene $C_1=0$, $y=C_2\operatorname{sen} x$; las curvas de este haz forman un campo central en el segmento $0\leqslant x\leqslant a$, $a<\pi$ que incluye la extremal $y=0$

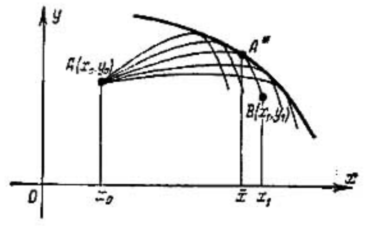


Fig. 8.7

para $C_2=0$. El parámetro C_2 de la familia es igual a la derivada y'_x en el punto (0, 0). Si en este mismo problema fuera $a\geqslant\pi$, la familia $y=C_2\operatorname{sen} x$ no formaría campo (véase la pág. 359).

Es sabido que dos curvas infinitamente cercanas de la familia $F(x, y, C)=0$ se cortan en los puntos de la curva C-discriminante, la cual se determina por las ecuaciones

$$F(x, y, C)=0; \qquad \frac{\partial F}{\partial C}=0.$$

Recordemos que en la curva C-discriminante se incluyen, en particular, la envolvente de la familia y los lugares geométricos de los puntos múltiples de las curvas de dicha familia. Si $F(x, y, C)=0$ es la ecuación de un haz de curvas, su centro pertenece también a la curva C-discriminante. Por esto, si se toma un haz de extremales $y=y(x, C)$ que pasan por el punto (x_0, y_0) y se determina su curva C-discriminante $\Phi(x, y)=0$, entonces las curvas próximas de la familia $y=y(x, C)$ se cortarán en las cercanías de la curva $\Phi(x, y)=0$. En particular, las curvas de esta familia próximas a la extremal considerada $y=y(x)$, que pasa por los puntos $A(x_0, y_0)$ y $B(x_1, y_1)$, se cortarán en puntos cercanos a los puntos de tangencia (o de intersección) de la curva $y=y(x)$ con la curva C-discriminante (véase la fig. 8.7, en donde la curva C-discriminante está representada por una línea gruesa). Si el arco AB de la extremal $y=y(x)$ no tiene puntos comunes diferentes de A con la curva C-discriminante del haz de extremales que incluye a la extremal dada, entonces las extremales del haz suficientemente próximas al arco AB no se cortan, es decir, forman un campo central que incluye al arco AB en un entorno de este arco (fig. 8.8)

Si el arco AB de la extremal $y=y(x)$ tiene un punto común A^*, diferente del punto A, con la curva C-discriminante del haz $y=y(x, C)$, entonces las curvas del haz próximas a $y=y(x)$ pueden cortarse entre sí y con la curva $y=y(x)$ en las proximidades del punto A^* y, en general, no forman campo (fig. 8.7). El punto A^* se llama *conjugado* del punto A.

El resultado obtenido se puede enunciar así: *para construir un campo central de extremales con centro en el punto A que contenga el arco AB de la extremal, es suficiente que el punto A^* conjugado*

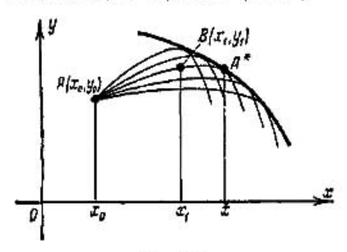


Fig. 8.8

del A no pertenezca al arco AB. Esta condición de la posibilidad de la construcción de un campo de extremales que incluya a la extremal dada se llama *condición de Jacobi*.

No es difícil formular esta condición también en forma analítica. Sea $y=y(x, C)$ la ecuación del haz de extremales con centro en el punto A; el parámetro C se puede considerar, para fijar ideas, que coincide con el coeficiente angular y' de las extremales del haz en el punto A. La curva C-discriminante se determina por las ecuaciones

$$y=y(x, C); \quad \frac{\partial y(x, C)}{\partial C}=0.$$

A lo largo de cada curva fija de la familia la derivada $\frac{\partial y(x, C)}{\partial C}$ es una función sólo de x. Denotaremos abreviadamente por u dicha función: $u=\frac{\partial y(x, C)}{\partial C}$, donde C está dado; de aquí $u'_x=\frac{\partial^2 y(x,C)}{\partial C\partial x}$. Las funciones $y=y(x, C)$ son soluciones de la ecuación de Euler; por lo tanto,

$$F_y(x, y(x, C), y'_x(x, C))-\frac{d}{dx}F_{y'}(x, y(x, C), y'_x(x,C))\equiv 0.$$

Derivando esta identidad con respecto a C y haciendo $\frac{\partial y(x, C)}{\partial C}=u$,

se obtiene

$$F_{yy}u + F_{yy'}u' - \frac{d}{dx}(F_{yy'}u + F_{y'y'}u') = 0,$$

o bien

$$\left(F_{yy} - \frac{d}{dx}F_{yy'}\right)u - \frac{d}{dx}(F_{y'y'}u') = 0.$$

Aquí $F_{yy}(x, y, y')$, $F_{yy'}(x, y, y')$ y $F_{y'y'}(x, y, y')$ son funciones conocidas de x, debido a que el segundo argumento y es igual a la solución $y = y(x, C)$ de la ecuación de Euler, tomada para el valor $C = C_0$ que corresponde a la extremal AB. Esta ecuación lineal homogénea de segundo orden con respecto a u se llama *ecuación de Jacobi*.

Si la solución $u = \frac{\partial y(x, C)}{\partial C}$ de esta ecuación que se anula en el centro del haz para $x = x_0$ (el centro del haz siempre pertenece a la curva C-discriminante) se anula también en algún otro punto del intervalo $x_0 < x < x_1$, entonces el punto conjugado de A, que se determina por las ecuaciones

$$y = y(x, C_0) \text{ y } \frac{\partial y(x, C)}{\partial C} = 0, \text{ o bien } u = 0,$$

pertenece al arco AB de la extremal *). Si, en cambo, existe una solución de la ecuación de Jacobi que se anule para $x = x_0$ y no se anule en ningún otro punto del segmento $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, entonces no hay puntos conjugados de A en el arco AB; la condición de Jacobi se cumple y se puede incluir el arco AB de la extremal en un campo central de extremales con centro en el punto A.

Observación. Se puede demostrar que la condición de Jacobi es necesaria para que se alcance un extremo, es decir, para la curva AB que realiza un extremo el punto conjugado de A no puede estar en el intervalo $x_0 < x < x_1$.

Ejemplo 2. ¿Se cumple la condición de Jacobi para la extremal de la funcional $v = \int_0^a (y'^2 - y^2)\,dx$ que pasa por los puntos $A(0, 0)$ y $B(a, 0)$?

La ecuación de Jacobi tiene la forma

$$-2u - \frac{d}{dx}(2u') = 0, \text{ o bien } u'' + u = 0,$$

de donde

$$u = C_1 \operatorname{sen}(x - C_2).$$

---

*) Obsérvese que todas las soluciones no triviales de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden que satisfacen la condición $u(x_0) = 0$ se diferencian entre sí sólo por un factor constante no nulo y, por lo tanto, se anulan simultáneamente.

Como $u(0)=0$, entonces $C_2=0$; $u=C_1 \operatorname{sen} x$. La función u se anula en los puntos $x=k\pi$, donde k es un entero; por lo tanto, si $0<a<\pi$, la función u se anula en el segmento $0 \leqslant x \leqslant a$ sólo en el punto $x=0$, y la condición de Jacobi se cumple. Si, en cambio, $a \geqslant \pi$, la función u se anula en el segmento $0 \leqslant x \leqslant a$ también por lo menos en el punto $x=\pi$, y la condición de Jacobi no se cumple (compárese con el ejemplo 1, pág. 360).

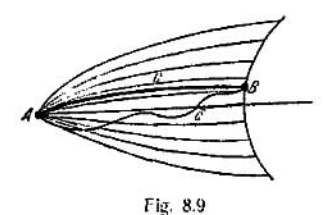


Fig. 8.9

Ejemplo 3. ¿Se cumple la condición de Jacobi para la extremal de la funcional

$$v[y(x)]=\int_0^a (y'^2+y^2+x^2)\,dx$$

que pasa por los puntos $A(0, 0)$ y $B(a, 0)$?

La ecuación de Jacobi tiene la forma $u''-u=0$. Tomemos su solución general en la forma $u=C_1 \operatorname{sh} x+C_2 \operatorname{ch} x$. De la condición $u(0)=0$ se halla $C_2=0$, $u=C_1 \operatorname{sh} x$. Las curvas del haz $u=C_1 \operatorname{sh} x$ cortan el eje Ox sólo en el punto $x=0$. La condición de Jacobi se cumple para todo a.

§ 2. FUNCION $E(x, y, p, y')$

Supongamos que en el problema simple sobre el extremo de la funcional

$$v=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx; \quad y(x_0)=y_0; \; y(x_1)=y_1$$

se cumple la condición de Jacobi y, por consiguiente, la extremal C que pasa por los puntos $A(x_0, y_0)$ y $B(x_1, y_1)$ puede ser incluida en un campo central con inclinación igual a $p(x, y)$ (fig. 8.9)*). Transformemos el incremento $\Delta v=\int_{\tilde{C}} F(x, y, y')\,dx - \int_C F(x, y, y')\,dx$ a una forma más cómoda para su estudio, para determinar el signo del incremento Δv de la funcional v al pasar de la extremal C a cierta curva próxima admisible $\tilde{C}$. (Los símbolos

$$\int_{\tilde{C}} F(x, y, y')\,dx \quad \text{y} \quad \int_C F(x, y, y')\,dx$$

---

*) Se hubiera podido suponer que la extremal está incluida no en un campo central, sino en uno propio.

representan los valores de la funcional $v=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$ tomados respectivamente por los arcos de las curvas $\tilde{C}$ y C).

Consideremos la funcional auxiliar

$$\int_{\tilde{C}} \left[F(x, y, p)+\left(\frac{dy}{dx}-p\right)F_p(x, y, p)\right] dx,$$

que se transforma en $\int_C F(x, y, y')\,dx$ en la extremal C, en virtud de que $\frac{dy}{dx}=p$ en las extremales del campo. Por otro lado, la misma funcional auxiliar

$$\int_{\tilde{C}} \left[F(x, y, p)+\left(\frac{dy}{dx}-p\right)F_p(x, y, p)\right] dx,$$

o bien

$$\int_{\tilde{C}} [F(x, y, p)-pF_p(x, y, p)]\,dx+F_p(x, y, p)\,dy \qquad (8.1)$$

es la integral de una diferencial total. En efecto, la diferencial de la función $\bar{v}(x, y)$, en la cual se transforma la funcional $v[y(x)]$ en las extremales del campo, tiene, según el § 1 del capítulo 7 (pág. 338), la forma

$$d\bar{v}=[F(x, y, y')-y'F_{y'}(x, y, y')]\,dx+F_{y'}(x, y, y')\,dy,$$

y se diferencia sólo por la notación del coeficiente angular de la tangente a las extremales del campo de la expresión subintegral en la integral auxiliar (8.1) considerada.

De este modo, la integral $\int_{\tilde{C}} [F(x, y, p)+(y'-p)F_p]\,dx$ coincide con la $\int_C F(x, y, y')\,dx$ en la extremal C, y como la funcional $\int_{\tilde{C}} [F(x, y, p)+(y'-p)F_p]\,dx$ es la integral de una diferencial total—y, por lo tanto, no depende del camino de integración—, entonces

$$\int_C F(x, y, y')\,dx-\int_{\tilde{C}} [F(x, y, p)+(y'-p)F_p(x, y, p)]\,dx$$

no sólo para $\tilde{C}=C$, sino también para cualquier $\tilde{C}$.

Por lo tanto, el incremento

$$\Delta v = \int_{\bar{C}} F(x, y, y')\,dx - \int_{C} F(x, y, y')\,dx$$

puede ser reducido a la forma siguiente:

$$\Delta v = \int_{\bar{C}} F(x, y, y')\,dx - \int_{\bar{C}} [F(x, y, p) + (y' - p) F_p(x, y, p)]\,dx =$$
$$= \int_{\bar{C}} [F(x, y, y') - F(x, y, p) - (y' - p) F_p(x, y, p)]\,dx.$$

La función subintegral se llama *función de Weierstrass*, y se denota por $E(x, y, p, y')$:

$$E(x, y, p, y') = F(x, y, y') - F(x, y, p) - (y' - p) F_p(x, y, p).$$

En estas notaciones

$$\Delta v = \int_{x_0}^{x_1} E(x, y, p, y')\,dx.$$

Es evidente que una condición suficiente para que la funcional v tenga un mínimo en la curva C es que la función E no sea negativa, puesto que si $E \geqslant 0$, entonces también $\Delta v \geqslant 0$; y una condición suficiente para que tenga un máximo será $E \leqslant 0$, debido a que en este caso también $\Delta v \leqslant 0$. Para que haya un mínimo débil es suficiente que la desigualdad $E(x, y, p, y') \geqslant 0$ (ó $E \leqslant 0$ en el caso de máximo) se cumpla para valores de x e y próximos al valor de x e y en la extremal C investigada, y para valores de y' cercanos a $p(x, y)$ en la misma extremal; para que haya un mínimo fuerte la misma desigualdad debe ser válida para las mismas x e y, pero para y' arbitrarias, puesto que en el caso de un extremo fuerte las curvas cercanas tendrán direcciones arbitrarias de las tangentes, y en el caso de extremo débil los valores de y' en las curvas cercanas son próximos a los valores $y' = p$ en la extremal C.

Por consiguiente, las siguientes condiciones serán suficientes para que la funcional v tenga un extremo en la curva C.

P a r a u n e x t r e m o d é b i l:

1. La curva C es una extremal que satisface las condiciones de frontera.

2. La extremal C puede ser incluida en un campo de extremales. Esta condición se puede sustituir por la de Jacobi.

3. La función $E(x, y, p, y')$ no cambia su signo en todos los puntos (x, y) próximos a la curva C, y para valores de y' cerca-

nos a $p(x, y)$. En el caso de mínimo es $E \geqslant 0$, en el caso de máximo, $E \leqslant 0$.

Para un extremo fuerte:

1. La curva C es una extremal que satisface las condiciones de frontera.

2. La extremal C puede ser incluida en un campo de extremales. Esta condición se puede sustituir por la de Jacobi.

3. La función $E(x, y, p, y')$ no cambia su signo en todos los puntos (x, y) próximos a la curva C y para valores cualesquiera de y'. En el caso de mínimo es $E \geqslant 0$, en el caso de máximo, $E \leqslant 0$.

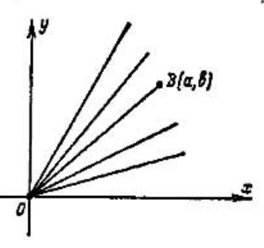


Fig. 8.10

Observación. Se puede demostrar que la condición de Weierstrass es necesaria. Más exactamente, si en un campo central que incluya a la extremal C la función E tiene signos opuestos en los puntos de la extremal para ciertas y', entonces no hay extremo fuerte. Si esta propiedad tiene lugar para valores de y' arbitrariamente próximos a p, tampoco hay extremo débil.

Ejemplo 1. Investigar el extremo de la funcional

$$v=\int_0^a y'^3\,dx;\quad y(0)=0,\quad y(a)=b;$$

$$a>0,\quad b>0.$$

Las rectas $y=C_1x+C_2$ son extremales. El extremo puede alcanzarse sólo en la recta $y=\frac{b}{a}x$. El haz de rectas $y=C_1x$ con centro en el punto (0, 0) forma un campo central que incluye a la extremal $y=\frac{b}{a}x$ (fig. 8.10).

La función E es igual a

$$E(x, y, p, y')=y'^3-p^3-3p^2(y'-p)=(y'-p)^2(y'+2p).$$

En la extremal $y=\frac{b}{a}x$ la inclinación del campo es $p=\frac{b}{a}>0$, y si y' toma valores próximos a $p=\frac{b}{a}$, entonces $E \geqslant 0$ y, en consecuencia se cumplen todas las condiciones suficientes para que haya un mínimo débil. De este modo, en la extremal $y=\frac{b}{a}x$ hay un mínimo débil. Si, en cambio, y' toma valores arbitrarios, entonces $(y'+2p)$ puede tener cualquier signo y, por lo tanto, la función E no tiene signo constante; no se cumplen las condiciones suficientes

para que haya un mínimo fuerte. Si se toma en cuenta la observación de la pág. 367, se puede afirmar que no hay mínimo fuerte en la recta $y=\frac{b}{a}x$.

Ejemplo 2. Analizar el extremo de la funcional

$$\int_0^a (6y'^2 - y'^4 + yy')\,dx, \quad y(0)=0, \quad y(a)=b; \quad a>0 \quad \text{y} \quad b>0,$$

en la clase de las funciones continuas con derivada primera continua.

Las rectas $y=C_1x+C_2$ son extremales. La recta $y=\frac{b}{a}x$ satisface las condiciones de frontera, y se incluye en el haz de extremales $y=C_1x$ que forman un campo central. La función E es igual a

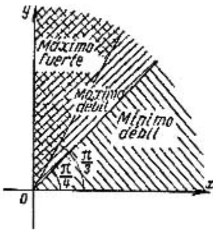


Fig. 8.11

$$E(x, y, p, y')=6y'^2-y'^4+yy'-6p^2+p^4-\\ -yp-(y'-p)(12p-4p^3+y)=-(y'-\\ -p)^2[y'^2+2py'-(6-3p^2)].$$

El signo de E es opuesto al signo del último factor

$$y'^2+2py'-(6-3p^2).$$

Este factor se anula y puede cambiar su signo sólo cuando y' pasa por el valor $y'=-p\pm\pm\sqrt{6-2p^2}$. Para $6-2p^2\leqslant 0$ ó $p\geqslant\sqrt{3}$, para toda y' tendremos $[y'^2+2py'-(6-3p^2)]\geqslant\geqslant 0$; si, en cambio, $6-2p^2>0$ ó $p<\sqrt{3}$, la expresión $[y'^2+2py'-(6-3p^2)]$ cambia su signo. Si en este caso y' se diferencia suficientemente poco de p, la última expresión mantiene su signo positivo $p>1$, y negativo para $p<1$.

Por lo tanto, para $p=\frac{b}{a}<1$ ó $b<a$ se tiene un mínimo débil, puesto que $E\geqslant 0$ para valores de y' próximos a p; para $p=\frac{b}{a}>1$ ó $b>a$ se tiene un máximo débil. Para $p=\frac{b}{a}\geqslant\sqrt{3}$ se tiene un máximo fuerte, ya que $E\leqslant 0$ para valores cualesquiera de y'. Para $p=\frac{b}{a}<\sqrt{3}$, en virtud de la observación de la pág. 367, no hay ni mínimo fuerte ni máximo fuerte (fig. 8.11).

Incluso en los ejemplos citados más arriba, sumamente simples, el estudio del signo de la función E causó ciertas dificultades; por esto, sería conveniente sustituir la condición de que la función E tenga signo constante por otra, de más fácil comprobación. Supongamos que la función $F(x, y, y')$ es derivable tres veces respecto al argumento y'. Según la fórmula de Taylor,

$$F(x, y, y')=F(x, y, p)+(y'-p)F_p(x, y, p)+\frac{(y'-p)^2}{2!}F_{y'y'}(x, y, q),$$

donde q está contenido entre p e y'.

La función

$$E(x, y, p, y')=F(x, y, y')-F(x, y, p)-(y'-p)F_p(x, y, p),$$

luego de sustiuir $F(x, y, y')$ por su desarrollo mediante la fórmula de Taylor, toma la forma

$$E(x, y, p, y') = \frac{(y'-p)^2}{2!} F_{y'y'}(x, y, q).$$

De aquí se ve que la función E conserva su signo si $F_{y'y'}(x, y, q)$ lo conserva. Al estudiar el extremo débil, la función $F_{y'y'}(x, y, q)$ debe conservar su signo para valores de x e y en los puntos cercanos a los puntos de la extremal que se investiga, y para valores de q próximos a p. Si $F_{y'y'}(x, y, y') \neq 0$ en los puntos de la extremal C, entonces en virtud de la continuidad esta derivada segunda conserva su signo en los puntos próximos a la curva C, y para valores de y' próximos a los valores de y' en la curva C. De este modo, al estudiar un mínimo débil la condición $E \geqslant 0$ puede ser sustituida por la $F_{y'y'} > 0$ en la extremal C; al estudiar un máximo débil, la condición $E \leqslant 0$ puede sustituirse por la $F_{y'y'} < 0$ en la curva C. La condición $F_{y'y'} > 0$ (ó $F_{y'y'} < 0$) se llama *condición de Legendre* *).

Al estudiar un mínimo fuerte la condición $E \geqslant 0$ puede sustituirse por la $F_{y'y'}(x, y, q) \geqslant 0$ en los puntos (x, y) próximos a los puntos de la curva C para valores arbitrarios de q. En este caso se supone, claro está, que el desarrollo mediante la fórmula de Taylor

$$F(x, y, y') = F(x, y, p) + (y'-p) F_p(x, y, p) + \frac{(y'-p)^2}{2!} F_{y'y'}(x, y, q)$$

tiene lugar para y' cualesquiera. Al estudiar un máximo fuerte se obtiene la condición $F_{y'y'}(x, y, q) \leqslant 0$, bajo las mismas suposiciones respecto a la región de variación de los argumentos y a la validez del desarrollo de la función $F(x, y, y')$ por la fórmula de Taylor.

Ejemplo 3. Analizar el extremo de la funcional

$$v[y(x)] = \int_0^a (y'^2 - y^2)\,dx, \quad a > 0; \quad y(0) = 0, \quad y(a) = 0.$$

La ecuación de Euler tiene la forma $y'' + y = 0$; su solución general es $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$. Utilizando las condiciones de frontera, se obtiene $C_1 = 0$ y $C_2 = 0$, si $a \neq k\pi$, donde k es un entero.

De este modo, si $a \neq k\pi$, el extremo se puede alcanzar sólo en la recta $y = 0$. Si $a < \pi$, el haz de extremales $y = C_1 \operatorname{sen} x$ con centro en el punto $(0, 0)$ forma un campo central. Si $a > \pi$, la condición de Jacobi no se cumple (véase la pág. 359).

*) La condición $F_{y'y'} > 0$ (ó $F_{y'y'} < 0$) se llama con frecuencia *condición reforzada de Legendre*, y se llama condición de Legendre la desigualdad $F_{y'y'} \geqslant 0$ (ó $F_{y'y'} \leqslant 0$).

Resumen de las condiciones suficientes de mínimo de la funcional simple *)

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1} F(x,\ y,\ y')\,dx;\quad y(x_0)=y_0,\quad y(x_1)=y_1$$

Mínimo débil	Mínimo fuerte	Mínimo débil	Mínimo fuerte	Mínimo débil	Mínimo fuerte
1. $F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0$ 2. Condición de Jacobi 3. $F_{y'y'}>0$ en la extremal estudiada	1. $F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0$ 2. Condición de Jacobi 3. $F_{y'y'}(x,\ y,\ y')\geq 0$ para los puntos $(x,\ y)$ próximos a los puntos de la extremal estudiada y para valores cualesquiera de y'. Aquí se supone que la función $F(x,\ y,\ y')$ es derivable tres veces con respecto a y' para y' cualesquiera	1. $F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0$ 2. Condición de Jacobi 3. $E(x,\ y,\ p,\ y')\geq 0$ para los puntos $(x,\ y)$ próximos a los puntos de la extremal estudiada, y para y' próximos a $p(x,\ y)$	1. $F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0$ 2. Condición de Jacobi 3. $E(x,\ y,\ p,\ y')\geq 0$ para los puntos $(x,\ y)$ próximos a los puntos de la extremal estudiada, y para y' cualesquiera	1. $F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0$ 2. Existe un campo de extremales que incluye la extremal dada. 3. $E(x,\ y,\ p,\ y')\geq 0$ para los puntos $(x,\ y)$ próximos a los puntos de la extremal estudiada, y para y' próximos a $p(x,\ y)$	1. $F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0$ 2. Existe un campo de extremales que incluye la extremal dada. 3. $E(x,\ y,\ p,\ y')\geq 0$ para los puntos $(x,\ y)$ próximos a los puntos de la extremal estudiada, y para y' cualesquiera

*) Para obtener las condiciones suficientes de *máximo* hay que tomar en este resumen los signos de desigualdad en sentido contrario.

Como la función subintegral es derivable tres veces con respecto a y' para y' cualesquiera y $F_{y'y'}=2>0$ para valores cualesquiera de y', entonces en la recta $y=0$, para $a<\pi$, hay un mínimo fuerte. Si se tiene en cuenta la observación de la pág. 363, se puede afirmar que para $a>\pi$ no hay mínimo en la recta $y=0$

Ejemplo 4. Analizar el extremo de la funcional

$$v[y(x)]=\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\,dx,\quad y(0)=0,\quad y(x_1)=y_1$$

(véase el problema de la braquistócrona, pág. 311). Las extremales son las cicloides

$$x=C_1(t-\operatorname{sen} t)+C_2,$$
$$y=C_1(1-\cos t).$$

El haz de cicloides $x=C_1(t-\operatorname{sen} t)$, $y=C_1(1-\cos t)$ con centro en el punto

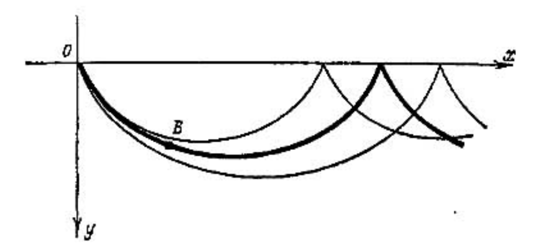


Fig. 8.12

(0, 0) forma un campo central que incluye la extremal

$$x=a(t-\operatorname{sen} t),\quad y=a(1-\cos t),$$

donde a se determina de la condición de que la cicloide pase por el segundo punto frontera $B(x_1, y_1)$, si $x_1<2\pi a$ (fig. 8.12).

Se tiene

$$F_{y'}=\frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}};\quad F_{y'y'}=\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)^3}}>0$$

para y' cualesquiera. Por consiguiente, para $x_1<2\pi a$ hay un mínimo fuerte en la cicloide

$$x=a(t-\operatorname{sen} t),\ y=a(1-\cos t).$$

Ejemplo 5. Analizar el extremo de la funcional

$$v[y(x)]=\int_0^a y'^3\,dx;\quad y(0)=0,\quad y(a)=b,\quad a>0,\quad b>0.$$

Este ejemplo fue resuelto en la pág. 367, pero ahora se puede simplificar el estudio en lo que se refiere a un extremo débil.

Las extremales son líneas rectas. El haz $y=Cx$ forma un campo central que incluye la extremal $y=\frac{b}{a}x$. En la extremal $y=\frac{b}{a}x$ la derivada segunda es $F_{y'y'}=6y'=6\frac{b}{a}>0$ En consecuencia, en la recta $y=\frac{b}{a}x$ hay un mínimo débil. La derivada segunda $F_{y'y'}=6y'$ no mantiene su signo constante para y' arbitrarias; por lo tanto, las condiciones suficientes para que haya un mínimo fuerte indicadas más arriba no se cumplen. Sin embargo, de aquí no se puede aún concluir que no hay un extremo fuerte.

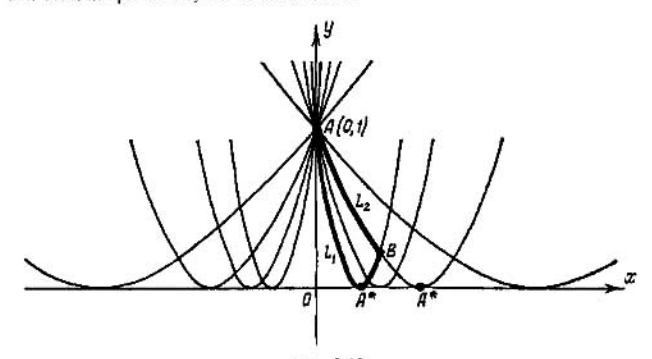


Fig. 8.13

E j e m p l o 6 Analizar el extremo de la funcional

$$v[y(x)]=\int_0^a \frac{y}{y'^2}\,dx,\quad y(0)=1,\quad y(a)=b,\quad a>0,\quad 0<b<1.$$

La primera integral de la ecuación de Euler (véase el caso 5 en la pág. 309) tiene la forma

$$\frac{y}{y'^2}+y'\,\frac{2y}{y'^3}=C,\ \text{o bien}\ y'^2=4C_1y,$$

extrayendo la raíz cuadrada, separando variables e integrando, se obtiene $y=(C_1x+C_2)^2$, que es una familia de parábolas. De la condición $y(0)=1$ se halla $C_2=1$. El haz de parábolas $y=(C_1x+1)^2$ con centro en el punto $A(0,1)$ tiene la curva C_1-discriminante $y=0$ (fig. 8.13). Por el punto $B(a, b)$ pasan dos parábolas de este haz. En el arco AB de una de ellas (L_1) se encuentra el punto A^* conjugado del A; en el otro (L_2) no hay puntos conjugados y, por lo tanto, la condición de Jacobi se cumple en el arco L_2, y en este arco de parábola puede haber un extremo. En un entorno de la extremal estudiada se tiene $F_{y'y'}=\frac{6y}{y'^4}>0$ para y' arbitrarias; sin embargo, en base a esto no se puede aún afirmar que en el arco L_2 hay un mínimo fuerte, debido a que la función

$F(x, y, y')=\frac{y}{y'^2}$ no puede ser representada en la forma

$$F(x, y, y')=F(x, y, p)+(y'-p)F_p(x, y, p)+\frac{(y'-p)^2}{2!}F_{y'y'}(x, y, q)$$

para valores de y' arbitrarios, ya que la función $F(x, y, y')$ es discontinua para $y'=0$. Se puede afirmar solamente que en L_2 hay un mínimo débil, puesto que para valores de y' cercanos a la inclinación del campo en la curva L_2 tiene lugar dicho desarrollo de la función $F(x, y, y')$ por la fórmula de Taylor. Para un estudio completo del extremo de esta funcional es necesario considerar la función $E(x, y, p, y')$:

$$E(x, y, p, y')=\frac{y}{y'^2}-\frac{y}{p^2}+\frac{2y}{p^3}(y'-p)=\frac{y(y'-p)^2(2y'+p)}{y'^2p^3}.$$

Como el factor $(2y'+p)$ no mantiene su signo constante para y' arbitrarias, se puede afirmar, en virtud de la observación de la pág. 367, que no hay un mínimo fuerte en el arco L_2.

La teoría expuesta se generaliza sin cambios sustanciales a las funcionales de la forma

$$v[y_1, y_2, \ldots, y_n]=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\,dx;$$

$$y_i(x_0)=y_{i0}, \quad y_i(x_1)=y_{i1} \quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

La función E tiene la forma

$$E=F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')-F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, p_1, p_2, \ldots$$

$$\ldots, p_n)-\sum_{i=1}^{n}(y_i'-p_i)F_{p_i}(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, p_1, p_2, \ldots, p_n),$$

donde p_i son las funciones de inclinación del campo, al cual se le imponen ciertas limitaciones (bajo estas limitaciones el campo se llama especial).

La condición de Legendre $F_{y'y'}\geqslant 0$ se sustituye por las condiciones siguientes:

$$F_{y_1'y_1'}\geqslant 0, \quad \begin{vmatrix} F_{y_1'y_1'} & F_{y_1'y_2'} \\ F_{y_2'y_1'} & F_{y_2'y_2'} \end{vmatrix}\geqslant 0, \quad \ldots, \quad \begin{vmatrix} F_{y_1'y_1'} & F_{y_1'y_2'} & \ldots & F_{y_1'y_n'} \\ F_{y_2'y_1'} & F_{y_2'y_2'} & \ldots & F_{y_2'y_n'} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ F_{y_n'y_1'} & F_{y_n'y_2'} & \ldots & F_{y_n'y_n'} \end{vmatrix}\geqslant 0.$$

Las condiciones suficientes de *mínimo débil* se pueden obtener tanto para el problema simple como para otros más complejos por otro método, basado en el estudio del signo de la segunda variación.

El incremento de la funcional en el problema simple se puede reducir, mediante la fórmula de Taylor, a la forma siguiente:

$$\Delta v=\int_{x_0}^{x_1}[F(x, y+\delta y, y'+\delta y')-F(x, y, y')]\,dx=$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}(F_y\,\delta y+F_{y'}\delta y')\,dx+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}[F_{yy}\delta y^2+2F_{yy'}\delta y\,\delta y'+F_{y'y'}\delta y'^2]\,dx+R,$$

donde R tiene orden mayor que 2 respecto a δy y $\delta y'$. Al investigar un extremo débil δy y $\delta y'$ son suficientemente pequeñas, y en este caso el signo del incremento Δv se determina por el signo del término que se halla en el segundo miembro y contiene las potencias menores de δy y $\delta y'$. En las extremales la primera variación será

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y')\, dx = 0$$

y, por lo tanto, el signo del incremento Δv coincide en general con el de la segunda variación

$$\delta^2 v = \int_{x_0}^{x_1} (F_{yy} \delta y^2 + 2F_{yy'} \delta y\, \delta y' + F_{y'y'}\, \delta y'^2)\, dx.$$

La condición de Legendre conjuntamente con la de Jacobi son precisamente condiciones que aseguran que el signo de la segunda variación sea constante y, conjuntamente con esto, sea constante el signo del incremento Δv en el problema sobre un extremo débil.

En efecto, consideremos la integral

$$\int_{x_0}^{x_1} [\omega'(x)\, \delta y^2 + 2\omega(x)\, \delta y\, \delta y']\, dx, \tag{8.2}$$

donde $\omega(x)$ es una función derivable arbitraria. Esta integral es igual a cero:

$$\int_{x_0}^{x_1} [\omega'(x)\, \delta y^2 + 2\omega(x)\, \delta y\, \delta y']\, dx = \int_{x_0}^{x_1} d(\omega \delta y^2) = [\omega(x)\, \delta y^2]_{x_0}^{x_1} = 0$$

(puesto que $\delta y|_{x_0} = \delta y|_{x_1} = 0$).

Sumando la integral (8.2) a la segunda variación, se obtiene

$$\delta^2 v = \int_{x_0}^{x_1} [(F_{yy} + \omega')\, \delta y^2 + 2(F_{yy'} + \omega)\, \delta y\, \delta y' + F_{y'y'}\, \delta y'^2]\, dx.$$

La función $\omega(x)$ se escoge de modo que la función subintegral se transforme, salvo un factor, en un cuadrado perfecto. Para esto la función $\omega(x)$ debe satisfacer la ecuación

$$F_{y'y'}(F_{yy} + \omega') - (F_{yy'} - \omega)^2 = 0.$$

Con la función ω elegida de este modo, la segunda variación toma la forma

$$\delta^2 v = \int_{x_0}^{x_1} F_{y'y'} \left(\delta y' + \frac{F_{yy'} + \omega}{F_{y'y'}} \delta y\right)^2 dx$$

y, en consecuencia, su signo coincide con el de $F_{y'y'}$.

Sin embargo, esta transformación es posible sólo bajo la hipótesis de que la ecuación diferencial

$$F_{y'y'}(\omega' + F_{yy}) - (F_{yy'} + \omega)^2 = 0$$

tenga una solución derivable $\omega(x)$ en el segmento (x_0, x_1).

Transformando esta ecuación a nuevas variables mediante la sustitución

$$\omega = -F_{yy'} - F_{y'y'} \frac{u'}{u},$$

donde u es una nueva función incógnita, se obtiene

$$\left(F_{yy} - \frac{d}{dx} F_{yy'}\right) u - \frac{d}{dx}(F_{y'y'} u') = 0,$$

que es la ecuación de Jacobi (véase la pág. 363).

Si existe una solución de esta ecuación que no se anule para $x_0 < x \leqslant x_1$, es decir, si se cumple la condición de Jacobi, existe, para dichos valores de x, una solución continua y derivable

$$\omega(x) = -F_{yy} - F_{y'y'} \frac{u'}{u}$$

de la ecuación

$$F_{y'y'}(F_{yy} + \omega') - (F_{yy'} + \omega)^2 = 0.$$

De este modo, las condiciones de Legendre y de Jacobi aseguran la constancia del signo de la segunda variación y, por consiguiente, son condiciones suficientes de mínimo ($F_{y'y'} > 0$) o máximo ($F_{y'y'} < 0$) débil.

§ 3. TRANSFORMACION DE LAS ECUACIONES DE EULER A LA FORMA CANONICA

El sistema de n ecuaciones de Euler (véase la pág. 312)

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{8.3}$$

se puede sustituir por un sistema de $2n$ ecuaciones de primer orden Haciendo en (8.3)

$$F_{y_k'} = q_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{8.4}$$

se obtiene

$$\frac{dq_k}{dx} = \frac{\partial F}{\partial y_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{8.5}$$

Ahora resolvemos el sistema de ecuaciones (8.4) con respecto a y_k' (para que esta resolución sea posible supondremos que

$$\frac{D\left(F_{y_1'}, F_{y_2'}, \ldots, F_{y_n'}\right)}{D(y_1', y_2', \ldots, y_n')} \neq 0),$$

$$y_k' = \omega_k(x, y_s, q_s), \tag{8.6}$$

donde

$$\omega_k(x, y_s, q_s) = \omega_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, q_1, q_2, \ldots, q_n),$$

y sustituimos (8.6) en (8.5). Entonces se obtiene un sistema de $2n$

ecuaciones de primer orden en la forma normal:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy_k}{dx}&=\omega_k(x,\ y_s,\ q_s),\\ \frac{dq_k}{dx}&=\left\{\frac{\partial F}{\partial y_k}\right\}.\end{aligned}\right\}\qquad(8.7)$$

Aquí y en lo sucesivo las llaves indican que en los paréntesis se ha sustituido y'_k por $\omega_k(x,\ y_s,\ q_s)$.

Mediante la función

$$H(x,\ y_s,\ q_s)=\sum_{i=1}^{n}\omega_i q_i-\{F\}$$

el sistema (8.7) puede escribirse en la forma canónica:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy_k}{dx}&=\frac{\partial H}{\partial q_k},\\ \frac{dq_k}{dx}&=-\frac{\partial H}{\partial y_k}\end{aligned}\right\}\quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).\qquad(8.8)$$

Obsérvese que si la función $F(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n,\ y'_1,\ y'_2,\ \ldots,\ y'_n)$ no depende en forma explícita de x, el sistema (8.8) tiene la primera integral $H=C$. En efecto, en este caso

$$H=\sum_{i=1}^{n}\omega_i q_i-\{F\}$$

tampoco contiene a x en forma explícita y, en consecuencia,

$$\frac{dH}{dx}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dx}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dx}.$$

Mediante las ecuaciones (8.8) se obtiene

$$\frac{dH}{dx}=0,\quad H=C$$

a lo largo de las curvas integrales del sistema (8.8).

Para el problema simple esta primera integral ya fue obtenida en la pág. 310 .

Ejemplo 1. Ley de la conservación de la energía. La función

$$H=\sum_{i=1}^{n}\omega_i q_i-\{F\}$$

para la funcional

$$\int_{t_0}^{t_1}(T-U)\,dt,\ T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2),$$

donde se mantienen las notaciones del ejemplo 1 de la pág. 327 (T es la energía cinética del sistema de puntos materiales, U, la energía potencial), tiene la forma siguiente:

$$H=\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2)-(T-U)=T+U,$$

que es la energía total del sistema. Apliquemos el principio de la acción estacionaria. Si la energía potencial U no depende en forma explícita de t, es decir, si el sistema es conservativo, entonces las ecuaciones de Euler para la funcional $\int_{t_0}^{t_1}(T-U)\,dt$ tienen la primera integral $H=C$, $T+U=C$.

De este modo, la energía total de un sistema conservativo permanece constante durante el movimiento.

La integración del sistema canónico (8.8) es equivalente a la integración de la ecuación diferencial en derivadas parciales

$$\frac{\partial v}{\partial x}+H\left(x,\ y_s,\ \frac{\partial v}{\partial y_s}\right)=0, \tag{8.9}$$

donde

$$H\left(x,\ y_s,\ \frac{\partial v}{\partial y_s}\right)=H\left(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n,\ \frac{\partial v}{\partial y_1},\ \frac{\partial v}{\partial y_2},\ \ldots,\ \frac{\partial v}{\partial y_n}\right).$$

La ecuación (8.9) se llama *ecuación de Hamilton-Jacobi*.

Si se conoce una familia monoparamétrica de sus soluciones $v(x,\ y_s,\ \alpha)$, entonces se conoce también la primera integral $\frac{\partial v}{\partial \alpha}=\beta$ del sistema (8.8); β es una constante arbitraria. En efecto,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)=\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial \alpha}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 v}{\partial y_j\,\partial \alpha}\frac{\partial y_j}{\partial x}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial \alpha}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 v}{\partial y_j\,\partial \alpha}\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{8.10}$$

Derivando la identidad

$$\frac{\partial v(x,\ y_s,\ \alpha)}{\partial \alpha}\equiv-H\left(x,\ y_s,\ \frac{\partial v(x,\ y_s,\ \alpha)}{\partial y_s}\right)\text{ respecto a }\alpha,$$

se obtiene

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial \alpha}\equiv-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial q_s}\frac{\partial^2 v}{\partial y_s\,\partial \alpha} \tag{8.11}$$

y, sustituyendo (8.11) en (8.10), se obtiene que el segundo miembro de (8.10) es idénticamente nulo. De este modo,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)\equiv 0,$$

de donde

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha}=\beta.$$

Por lo tanto, si se conoce la integral total de la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$v = v(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),$$

se conocen también n primeras integrales del sistema (8.8):

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha_i} = \beta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{8.12}$$

Si el jacobiano del sistema (8.12) es diferente de cero,

$$\left| \frac{\partial^2 v}{\partial y_i \partial \alpha_i} \right| \neq 0,$$

entonces el sistema (8.12) determina y_i como funciones de los demás argumentos:

$$y_i = y_i(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \tag{8.13}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Con esto se obtiene una familia de extremales que depende de $2n$ parámetros. Se puede demostrar que (8.13) es la solución general del sistema de ecuaciones de Euler, y las funciones

$$y_i(x, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n)$$

y

$$q_i = \frac{\partial v(x, y_s, \alpha_s)}{\partial y_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

son la solución general del sistema (8.8).

Ejemplo. Hallar la ecuación de las líneas geodésicas en una superficie en la cual el elemento de longitud de una curva tiene la forma

$$ds^2 = [\varphi_1(x) + \varphi_2(y)](dx^2 + dy^2),$$

es decir, hallar las extremales de la funcional

$$S = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{[\varphi_1(x) + \varphi_2(y)](1 + y'^2)}\, dx.$$

Como

$$H = \frac{\sqrt{\varphi_1(x) + \varphi_2(y)}}{\sqrt{1 + y'^2}} = \sqrt{\varphi_1(x) + \varphi_2(y)} \cdot \sqrt{1 - q^2},$$

$$q = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}, \quad H^2 + q^2 = \varphi_1(x) + \varphi_2(y),$$

entonces la ecuación de Hamilton-Jacobi tiene la forma

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = \varphi_1(x) + \varphi_2(y).$$

o bien

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2-\varphi_1(x)=\varphi_2(y)-\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2.$$

Para las ecuaciones de este tipo (ecuaciones con variables separadas),

$$\Phi_1\left(x, \frac{\partial v}{\partial x}\right)=\Phi_2\left(y, \frac{\partial v}{\partial y}\right),$$

se halla fácilmente una primera integral. Haciendo

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2-\varphi_1(x)=\alpha \text{ y } \varphi_2(y)-\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2=\alpha,$$

o bien

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\sqrt{\varphi_1(x)+\alpha}$$

y

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\sqrt{\varphi_2(y)-\alpha},$$

se halla

$$v=\int\sqrt{\varphi_1(x)+\alpha}\,dx+\int\sqrt{\varphi_2(y)-\alpha}\,dy;$$

por consiguiente, la ecuación de las líneas geodésicas $\frac{\partial v}{\partial \alpha}=\beta$ tiene en este caso la forma

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\varphi_1(x)+\alpha}}-\int\frac{dy}{\sqrt{\varphi_2(y)-\alpha}}=\beta.$$

Observación. Se puede llegar también a la ecuación de Hamilton-Jacobi partiendo de otras consideraciones. Tomemos un campo central de extremales con centro en el punto $A(x_0, y_0)$ para la funcional

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}F(x, y, y')\,dx.$$

En las extremales del campo la funcional $v[y(x)]$ se transforma en una función $\bar{v}(x, y)$ de las coordenadas del segundo punto frontera $B(x, y)$. Como fue indicado en la pág. 377,

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}=-H(x, y, q), \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}=q.$$

Eliminando q, se obtiene

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}=-H\left(x, y, \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right).$$

De este modo, la función $\bar{v}(x, y)$ es solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi. Para la funcional

$$\int_{x_0}^{x_1}F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\,dx$$

tambien son válidos razonamientos completamente análogos.

EJERCICIOS DEL CAPITULO 8

Analizar los extremos de las funcionales:

1. $v[y(x)]=\int_0^2 (xy'+y'^2)\,dx;\quad y(0)=1;\quad y(2)=0.$

2. $v[y(x)]=\int_0^a (y'^2+2yy'-16y^2)\,dx;\quad a>0;\quad y(0)=0,\quad y(a)=0.$

3. $v[y(x)]=\int_{-1}^2 y'(1+x^2y')\,dx;\quad y(-1)=1,\quad y(2)=4.$

4. $v[y(x)]=\int_1^2 y'(1+x^2y')\,dx;\quad y(1)=3;\quad y(2)=5.$

5. $v[y(x)]=\int_{-1}^2 y'(1+x^2y')\,dx;\quad y(-1)=y(2)=1.$

6. $v[y(x)]=\int_0^{\frac{\pi}{4}} (4y^2-y'^2+8y)\,dx;\quad y(0)=-1;\quad y\left(\frac{\pi}{4}\right)=0.$

7. $v[y(x)]=\int_1^2 (x^2y'^2+12y^2)\,dx;\quad y(1)=1;\quad y(2)=8.$

8. $v[y(x)]=\int_0^1 (y'^2+y^2+2ye^{2x})\,dx;\quad y(0)=\frac{1}{3};\quad y(1)=\frac{1}{3}e^2.$

9. $v[y(x)]=\int_0^{\frac{\pi}{4}} (y^2-y'^2+6y\operatorname{sen}2x)\,dx;\quad y(0)=0;\quad y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1.$

10. $v[y(x)]=\int_0^{x_1} \frac{dx}{y'};\quad y(0)=0;\quad y(x_1)=y_1;\quad x_1>0;\quad y_1>0.$

11. $v[y(x)]=\int_0^{x_1} \frac{dx}{y'^2};\quad y(0)=0;\quad y(x_1)=y_1,\quad x_1>0,\quad y_1>0.$

12. $v[y(x)]=\int_1^2 \frac{x^3}{y'^2}\,dx;\quad y(1)=1;\quad y(2)=4.$

13. $v[y(x)]=\int_1^3 (12xy+y'^2)\,dx;\quad y(1)=0;\quad y(3)=26.$

14. $v[y(x)]=\int^2 [y^2+(y')^2-2xy]\,dx;\quad y(0)=0,\quad y(2)=3.$

CAPITULO 9

Problemas variacionales sobre un extremo condicionado

§ 1. ENLACES DEL TIPO $\varphi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)=0$

Se llaman problemas variacionales sobre un extremo condicionado a los problemas en los que se pide hallar el extremo de una funcional v, y a las funciones de las cuales depende la funcional v se le imponen ciertos enlaces. Por ejemplo, se pide investigar el extremo de la funcional

$$v[y_1, y_2, \ldots, y_n]=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\, dx$$

bajo las condiciones

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)=0 \quad (i=1, 2, \ldots, m;\ m<n).$$

Recordemos cómo se resuelve un problema análogo al estudiar el extremo de la función $z=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con los enlaces

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0 \quad (i=1, 2, \ldots, m;\ m<n).$$

El camino más natural es resolver el sistema

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0 \quad (i=1, 2, \ldots, m),$$

cuyas ecuaciones consideraremos independientes, respecto a algunas m variables, por ejemplo, respecto a $x_1, x_2, \ldots, x_m$:

$$\begin{aligned} x_1&=x_1(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n);\\ x_2&=x_2(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n);\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_m&=x_m(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

y sustituir las $x_1, x_2, \ldots, x_m$ halladas en $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Entonces la función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se transforma en una función $\Phi(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n)$ de sólo $n-m$ variables $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$, las cuales son ya independientes; por lo tanto, el problema queda reducido al estudio del extremo incondicional de la función Φ. Por este método, claro está, también se puede resolver el problema variacional planteado más arriba. Resolviendo el sistema $\varphi_i(x, y_1,$

$y_2, \ldots, y_n) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ con respecto a $y_1, y_2, \ldots, y_m$ (o a algunas otras m funciones y_i) y sustituyendo sus expresiones en $v[y_1, y_2, \ldots, y_n]$, se obtiene una funcional $W[y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots, y_n]$ que depende sólo de $n-m$ argumentos ya independientes; por lo tanto, a la funcional W se le pueden aplicar los métodos expuestos en el § 3 del capítulo 6. Sin embargo, tanto para las funciones como para las funcionales con frecuencia es más cómodo otro método de resolución, llamado método de los factores indeterminados, el cual conserva una equivalencia completa entre las variables. Como es sabido, en el estudio del extremo de la función $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con los enlaces $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, este método consiste en formar la nueva función auxiliar

$$z^* = f + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i,$$

donde λ_i son ciertos factores constantes; después, se estudia el extremo incondicional de la función z^*, es decir, se escribe el sistema de ecuaciones $\frac{\partial z^*}{\partial x_j} = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, completado con las ecuaciones de los enlaces $\varphi_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, del cual se determinan todas las $n+m$ incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$. El problema sobre un extremo condicional para las funcionales también puede ser resuelto en forma completamente análoga; más precisamente: si

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\,dx$$

y

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

entonces se forma la funcional

$$v^* = \int_{x_0}^{x_1} \left(F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)\varphi_i \right) dx, \text{ o bien } v^* = \int_{x_0}^{x_1} F^*\,dx,$$

donde

$$F^* = F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)\varphi_i,$$

para la cual se estudia ahora el extremo incondicional, es decir, se resuelve el sistema de ecuaciones de Euler

$$\left.\begin{array}{c} F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y_j'} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \\ \text{completado con las ecuaciones de los enlaces} \\ \varphi_i = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, m). \end{array}\right\} \qquad (9.1)$$

El número $m+n$ de ecuaciones es, en general, suficiente para determinar las $m+n$ funciones incógnitas $y_1, y_2, \ldots, y_n$ y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$; las condiciones de frontera $y_j(x_0)=y_{j0}$ e $y_j(x_1)=y_{j1}$ $(j=1, 2, \ldots, n)$ — las cuales no deben ser contradictorias con las ecuaciones de los enlaces — permiten, en general, determinar las $2n$ constantes arbitrarias en la solución general del sistema de ecuaciones de Euler.

Es evidente que las curvas halladas por este método, en las que la funcional v^* tiene un mínimo o un máximo, serán también soluciones del problema variacional inicial. En efecto, para las funciones halladas del sistema (9.1)

$$\lambda_i(x) \quad (i=1, 2, \ldots, m) \text{ e } y_j \, (j=1, 2, \ldots, n)$$
$$\text{todas las } \varphi_i=0$$

y, por consiguiente, $v^*=v$. Además, si para $y_j=y_j(x)$ $(j=1, 2, \ldots, n)$ determinadas del sistema (9.1) se alcanza un extremo incondicional de la funcional v^*, es decir, un extremo con respecto a todas las curvas cercanas — tanto las que satisfagan las ecuaciones de los enlaces como las que no las satisfagan — entonces, en particular, se alcanza un extremo con respecto a la clase más restringida de las curvas que satisfacen las ecuaciones de los enlaces.

Sin embargo, de este razonamiento no se deduce de ningún modo que todas las soluciones del problema original sobre un extremo condicional darán un extremo incondicional de la funcional v^* y, en consecuencia, falta aclarar si por este método pueden ser halladas todas las soluciones. Nos limitaremos a la demostración de una afirmación más débil.

Teorema. *Las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ que realizan un extremo de la funcional*

$$v=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\,dx$$

con las condiciones

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)=0 \quad (i=1, 2, \ldots, m;\ m<n)$$

satisfacen, con una elección adecuada de los factores $\lambda_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, m)$, las ecuaciones de Euler para la funcional

$$v^*=\int_{x_0}^{x_1}\left(F+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\varphi_i\right)dx=\int_{x_0}^{x_1} F^*\,dx.$$

Las funciones $\lambda_i(x)$ e $y_j(x)$ se determinan de las ecuaciones de Euler

$$F^*_{y_j}-\frac{d}{dx}F^*_{y_j'}=0 \quad (j=1, 2, \ldots, n)$$

y

$$\varphi_i = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Las ecuaciones $\varphi_i = 0$ también se pueden considerar ecuaciones de Euler para la funcional v^*, si se consideran como argumentos de ésta no sólo las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$, sino también $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x), \ldots, \lambda_m(x)$. Se supone que las ecuaciones $\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ son independientes, es decir, que uno de los jacobianos de orden m es diferente de cero, por ejemplo

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_m)} \neq 0.$$

Demostración. La condición fundamental de extremo $\delta v = 0$ toma en este caso la forma

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^{n} (F_{y_j}\delta y_j + F_{y'_j}\delta y'_j)\,dx = 0.$$

Integrando por partes los segundos sumandos de cada paréntesis y tomando en cuenta que

$$(\delta y_j)' = \delta y'_j \quad \text{y} \quad (\delta y_j)_{x=x_0} = 0;\ (\delta y_j)_{x=x_1} = 0,$$

se obtiene

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^{n} \left(F_{y_j} - \frac{d}{dx}F_{y'_j}\right)\delta y_j\,dx = 0.$$

Como las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ están sometidas a los m enlaces independientes

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

las variaciones δy_j no son arbitrarias, por lo que aún no se puede aplicar el lema fundamental. Las variaciones δy_j deben satisfacer las condiciones siguientes, que se obtienen variando las ecuaciones de los enlaces $\varphi_i = 0$:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\varphi_i}{\partial y_j}\delta y_j = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)\ ^{*)}$$

---

*) Más exactamente, aplicando la fórmula de Taylor a la diferencia

$$\varphi_i(x, y_1 + \delta y_1, \ldots, y_n + \delta y_n) - \varphi_i(x, y_1, \ldots, y_n)$$

entre los primeros miembros de las ecuaciones $\varphi_i(x, y_1 + \delta y_1, \ldots, y_n + \delta y_n) = 0$ y $\varphi_i(x, y_1, \ldots, y_n) = 0$, habría que escribir

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\varphi_i}{\partial y_j}\delta y_j + R_i = 0,$$

y, en consecuencia, sólo $n-m$ variaciones δy_j se pueden considerar arbitrarias, por ejemplo, $\delta y_{m+1}, \delta y_{m+2}, \ldots, \delta y_n$, y las demás se determinan de las ecuaciones obtenidas.

Multiplicando miembro a miembro cada una de estas ecuaciones por $\lambda_i(x)\,dx$ e integrando desde x_0 hasta x_1, se obtiene

$$\int_{x_0}^{x_1} \lambda_i(x) \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} \delta y_j\, dx = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

Sumando miembro a miembro estas m ecuaciones, a las cuales satisfacen las variaciones admisibles δy_j, y la ecuación

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^{n} \left(F_{y_j} - \frac{d}{dx} F_{y_j'} \right) \delta y_j\, dx = 0,$$

tendremos

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial F}{\partial y_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_j'} \right] \delta y_j\, dx = 0,$$

o bien, si se introduce la notación

$$F^* = F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x) \varphi_i,$$

se tendrá

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^{n} \left(F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y_j'} \right) \delta y_j\, dx = 0.$$

Aquí tampoco se puede aún aplicar el lema fundamental, puesto que las variaciones δy_j no son arbitrarias. Tomemos m factores $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_m(x)$ de modo que satisfagan las m ecuaciones

$$F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y_j'} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

o bien

$$\frac{\partial F}{\partial y_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_j'} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Estas ecuaciones forman un sistema lineal con respecto a λ_i cuyo

---

donde las R_i tienen orden mayor que 1 respecto a δy_j $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Sin embargo, como es fácil comprobar, los términos R_i no influyen sustancialmente en los razonamientos ulteriores, puesto que al calcular la variación de la funcional nos interesan sólo los términos de primer orden respecto a δy_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

determinante es diferente de cero,

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_m)} \neq 0;$$

por consiguiente, este sistema posee solución

$$\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_m(x)$$

Con las $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_m(x)$ escogidas de este modo, la condición fundamental de extremo

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^{n} \left(F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_j}\right)\delta y_j \, dx = 0$$

toma la forma

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=m+1}^{n} \left(F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_j}\right)\delta y_j \, dx = 0$$

Como para las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ que realizan el extremo de la funcional v esta ecuación funcional se reduce a una identidad ahora para δy_j cualesquiera $(j = m+1, m+2, \ldots, n)$, ya se puede aplicar el lema fundamental. Anulando sucesivamente todas las δy_j excepto una y aplicando el lema, se obtiene

$$F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_j} = 0 \quad (j = m+1, m+2, \ldots, n).$$

Tomando en cuenta las ecuaciones

$$F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

obtenidas más arriba, se obtiene, en definitiva, que las funciones que realizan un extremo condicional de la funcional v y los factores $\lambda_i(x)$ deben satisfacer el sistema de ecuaciones

$$F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$
$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Ejemplo 1. Hallar la distancia más corta entre dos puntos $A(x_0, y_0, z_0)$ y $B(x_1, y_1, z_1)$ en la superficie $\varphi(x, y, z) = 0$ (véase el problema de las líneas geodésicas, pág. 289). La distancia entre dos puntos en una superficie se determina, como es sabido, por la fórmula

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} \, dx.$$

En este caso hay que hallar el mínimo de l con la condición $\varphi(x, y, z) = 0$.

Según lo expuesto, se toma la funcional auxiliar

$$v^* = \int_{x_0}^{x_1} \left[\sqrt{1+y'^2+z'^2} + \lambda(x)\varphi(x, y, z)\right] dx$$

y se escribe para ésta las ecuaciones de Euler

$$\lambda(x)\varphi_y - \frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = 0;$$

$$\lambda(x)\varphi_z - \frac{d}{dx}\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = 0;$$

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

De estas tres ecuaciones se determinan las funciones buscadas

$$y = y(x) \quad \text{y} \quad z = z(x),$$

en las cuales puede haber un mínimo condicional de la funcional v, y el factor $\lambda(x)$.

Ejemplo 2. Hallar, aplicando el principio de Ostrogradski-Hamilton (véase la pág. 327), las ecuaciones de movimiento de un sistema de puntos materiales de masa m_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ con coordenadas (x_i, y_i, z_i) bajo la acción de fuerzas que tienen la función de fuerza $-U$, con los enlaces

$$\varphi_j(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n, z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0$$
$$(j = 1, 2, \ldots, m)$$

La integral de Ostrogradski-Hamilton

$$v = \int_{t_0}^{t_1} (T - U)\, dt$$

tiene en este caso la forma

$$v = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - U\right] dt,$$

y la funcional auxiliar es

$$v^* = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - U + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t)\varphi_j\right] dt.$$

Las ecuaciones de movimiento serán las ecuaciones de Euler para la funcional v^*. éstas tendrán la forma siguiente:

$$m_i\ddot{x}_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t)\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i};$$

$$m_i\ddot{y}_i = -\frac{\partial U}{\partial y_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t)\frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i};$$

$$m_i\ddot{z}_i = -\frac{\partial U}{\partial z_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t)\frac{\partial \varphi_j}{\partial z_i}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

§ 2. ENLACES DEL TIPO $\varphi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0$

En el parágrafo anterior hemos considerado el problema del estudio del extremo de la funcional

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\,dx;$$

$$y_j(x_0) = y_{j0}; \quad y_j(x_1) = y_{j1} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

con los enlaces *finitos*

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{9.2}$$

Supongamos ahora que las ecuaciones de los enlaces son *ecuaciones diferenciales*

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

En la mecánica los enlaces de este tipo se llaman *no holónomos*, y los del tipo (9.2), *holónomos*.

En este caso también se puede demostrar la regla de los factores, que consiste en que el extremo condicional de la funcional v se alcanza en las mismas curvas que realizan el extremo incondicional de la funcional

$$v^* = \int_{x_0}^{x_1} \left[F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)\varphi_i\right] dx = \int_{x_0}^{x_1} F^*\,dx,$$

donde

$$F^* = F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)\varphi_i$$

Sin embargo, la demostración se complica mucho en comparación con el caso de los enlaces finitos

Si, en cambio, nos limitamos a la demostración de la afirmación más débil sobre que las curvas en las cuales se alcanza un extremo condicional de la funcional v son, bajo una elección adecuada de $\lambda_i(x)$, extremales para la funcional v^*, entonces la demostración expuesta en el parágrafo anterior puede ser repetida con cambios insignificantes para el caso considerado.

En efecto, supongamos que uno de los determinantes funcionales de orden m es diferente de cero, por ejemplo,

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)}{D(y_1', y_2', \ldots, y_m')} = 0.$$

Esto asegura la independencia de los enlaces.

Resolviendo las ecuaciones $\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)=0$ con respecto a $y'_1, y'_2, \ldots, y'_m$, lo cual es posible en virtud de que

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)}{D(y'_1, y'_2, \ldots, y'_m)} \neq 0,$$

se obtiene $y'_i=\psi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_{m+1}, y'_{m+2}, \ldots, y'_n)$ $(i=1, 2, \ldots, m)$. Si se considera que $y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots, y_n$ son funciones dadas en forma arbitraria, entonces de este sistema de ecuaciones diferenciales se determinan $y_1, y_2, \ldots, y_m$. De este modo, $y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots, y_n$ son funciones derivables arbitrarias con valores frontera fijos y, por lo tanto, sus variaciones son arbitrarias en el mismo sentido.

Sea $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un sistema admisible arbitrario de funciones que satisface las ecuaciones $\varphi_i=0$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ de los enlaces. Variemos las ecuaciones de los enlaces

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} \delta y_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y'_j} \delta y'_j = 0 \qquad (i=1, 2, \ldots, m)\ ^{*)}.$$

Multiplicando miembro a miembro cada ecuación obtenida por un factor $\lambda_i(x)$ por ahora indeterminado e integrando desde x_0 hasta x_1, se obtiene

$$\int_{x}^{x_1} \lambda_i(x) \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} \delta y_j\, dx + \int_{x_0}^{x_1} \lambda_i(x) \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y'_j} \delta y'_j\, dx = 0;$$

integrando por partes cada sumando de la segunda integral y tomando en cuenta que $\delta y'_j=(\delta y_j)'$ y $(\delta y_j)_{x=x_0}=(\delta y_j)_{x=x_1}=0$, tendremos

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^{n} \left[\lambda_i(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} - \frac{d}{dx}\left(\lambda_i(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y'_j} \right) \right] \delta y_j\, dx = 0. \qquad (9.3)$$

De la condición necesaria fundamental de extremo $\delta v=0$ se obtiene

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^{n} \left(F_{y_j} - \frac{d}{dx} F_{y'_j} \right) \delta y_j\, dx = 0, \qquad (9.4)$$

puesto que

$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^{n} \left(F_{y_j} \delta y_j + F_{y'_j} \delta y'_j \right) dx = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^{n} \left(F_{y_j} - \frac{d}{dx} F_{y'_j} \right) \delta y_j\, dx.$$

Sumando miembro a miembro todas las ecuaciones (9.3) y la (9.4) e introduciendo

---

*) En este caso, al igual que en la pág. 384, habría que incluir en los primeros miembros de las ecuaciones sumandos que contengan términos de orden mayor que 1 respecto a δy_j y $\delta y'_j$ $(j=1, 2, \ldots, n)$; además, aquí es ya mucho más complicado tomar en cuenta la influencia de estos términos no lineales.

la notación $F^* = F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)\varphi_i$, se tendrá

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^{n} \left(F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_j} \right) \delta y_j \, dx = 0 \tag{9.5}$$

Como las variaciones δy_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ no son arbitrarias, aún no se puede aplicar el lema fundamental. Tomemos m factores $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_m(x)$ de modo que satisfagan las ecuaciones

$$F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

Si se escriben estas ecuaciones en forma desarrollada, se ve que son un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con respecto a

$$\lambda_i(x) \quad \text{y} \quad \frac{d\lambda_i}{dx} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

la cual posee, bajo las hipótesis tomadas, la solución $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_m(x)$ que depende de m constantes arbitrarias. Con las $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_m(x)$ elegidas de este modo, la ecuación (9.5) se reduce a la forma

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=m+1}^{n} \left(F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_j} \right) \delta y_j \, dx = 0,$$

donde las variaciones δy_j $(j = m+1, m+2, \ldots, n)$ son *ya arbitrarias* y, por consiguiente, haciendo todas las variaciones $\delta y_i = 0$, excepto alguna, δy_j, y aplicando el lema fundamental, se obtiene

$$F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_j} = 0 \qquad (j = m+1, m+2, \ldots, n).$$

De este modo, las funciones $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ que realizan un extremo condicional de la funcional v y los factores $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_m(x)$ deben satisfacer el sistema de $n+m$ ecuaciones:

$$F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

y

$$\varphi_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

es decir, deben satisfacer las ecuaciones de Euler para la funcional auxiliar v^*, que se considera como funcional que depende de $n+m$ funciones

$$y_1, y_2, \ldots, y_n, \quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m.$$

§ 3. PROBLEMAS ISOPERIMETRICOS

Se llaman problemas isoperimétricos, en el sentido restringido de esta palabra, a los problemas sobre la determinación de una figura geométrica de superficie máxima con perímetro dado.

Entre estos problemas extremales, estudiados aún en la Grecia antigua, había también problemas variacionales, por ejemplo, el

problema citado en la pág. 289 de la determinación de una curva cerrada de longitud dada que delimite una superficie máxima *). Dando la curva en forma paramétrica, $x=x(t)$, $y=y(t)$, se puede formular este problema así: hallar el máximo de la funcional

$$S=\int_{t_0}^{t_1} x\dot{y}\,dt \qquad \left(\text{o bien } S=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(x\dot{y}-y\dot{x})\,dt\right)$$

con la condición de que la funcional

$$\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt$$

se mantenga constante:

$$\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt=l$$

De este modo, se tiene aquí un problema variacional sobre un extremo condicional, con una condición peculiar: la integral $\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt$ se mantiene constante.

En la actualidad se llaman problemas isoperimétricos a una clase mucho más general de problemas, más precisamente, a todos los problemas variacionales en los cuales se pide hallar el extremo de la funcional

$$v=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)\,dx$$

con las llamadas *condiciones isoperimétricas*

$$\int_{x_0}^{x_1} F_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)\,dx=l_i$$

$$(i=1, 2, \ldots, m),$$

donde las l_i son constantes; m puede ser mayor, menor o igual a n, y también a problemas análogos para funcionales más complejas

Los problemas isoperimétricos pueden ser reducidos a problemas sobre un extremo condicional, considerados en el parágrafo

*) Aunque la solución de este problema era conocida ya en la Grecia antigua, su carácter variacional peculiar fue comprendido solamente a fines del siglo XVII.

anterior, por medio de la introducción de nuevas funciones desconocidas. Denotemos

$$\int_{x_0}^{x} F_i dx = z_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

de donde $z_i(x_0) = 0$, y de la condición $\int_{x_0}^{x_1} F_i dx = l_i$, se tiene $z_i(x_1) = l_i$.

Derivando z_i con respecto a x, tendremos

$$z_i'(x) = F_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m)$$

Con esto los enlaces integrales isoperimétricos $\int_{x_0}^{x_1} F_i dx = l_i$ han sido sustituidos por enlaces diferenciales:

$$z_i' = F_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m)$$

y, en consecuencia, el problema se redujo al considerado en el parágrafo anterior.

Aplicando la regla de los factores, en lugar de investigar el extremo condicional de la funcional $v = \int_{x_0}^{x_1} F dx$ con los enlaces $F_i - z_i' = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, se puede investigar el extremo incondicional de la funcional

$$v^* = \int_{x_0}^{x_1} \left[F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)(F_i - z_i') \right] dx = \int_{x_0}^{x_1} F^* dx,$$

donde

$$F^* = F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)(F_i - z_i')$$

Las ecuaciones de Euler para la funcional v^* tienen la forma

$$F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y_j'} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$
$$F^*_{z_i} - \frac{d}{dx} F^*_{z_i'} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

o bien

$$F_{y_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F_{i y_j} - \frac{d}{dx}\left(F_{y_j'} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F_{i y_j'} \right) = 0$$

$$(j=1, 2, \ldots, n),$$

$$\frac{d}{dx}\lambda_i(x)=0 \qquad (i=1, 2, \ldots, m).$$

De las últimas m ecuaciones se obtiene que todas las λ_i son constantes, y las primeras n ecuaciones coinciden con las ecuaciones de Euler para la funcional

$$v^{**}=\int_{x_0}^{x_1}\left(F+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i F_i\right)dx$$

De este modo, se obtiene la siguiente regla: para obtener la condición necesaria fundamental en el problema isoperimétrico sobre la determinación del extremo de la funcional $v=\int_{x_0}^{x_1} F dx$ con los enlaces $\int_{x_0}^{x_1} F_i dx=l_i$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ hay que formar la funcional auxiliar

$$v^{**}=\int_{x_0}^{x_1}\left(F+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i F_i\right)dx$$

donde las λ_i son constantes, y escribir sus ecuaciones de Euler.

Las constantes arbitrarias $C_1, C_2, \ldots, C_{2n}$ de la solución general del sistema de ecuaciones de Euler y las constantes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ se determinan de las condiciones de frontera

$$y_j(x_0)=y_{j0}, \quad y_j(x_1)=y_{j1} \qquad (j=1, 2, \ldots, n)$$

y de las condiciones isoperimétricas

$$\int_{x_0}^{x_1} F_i dx=l_i \qquad (i=1, 2, \ldots, m).$$

El sistema de ecuaciones de Euler para la funcional v^{**} no varía si v^{**} se multiplica por cierto factor constante μ_0 y, por lo tanto, se representa en la forma

$$\mu_0 v^{**}=\int_{x_0}^{x_1}\sum_{i=0}^{m}\mu_i F_i dx$$

donde se han introducido las notaciones $F_0=F$, $\mu_i=\lambda_i\mu_0$, $i=1, \ldots, m$. Ahora todas las funciones F_i figuran en forma simétrica; por esto, las extremales del problema variacional inicial

y del problema de hallar el extremo de la funcional $\int_{x_0}^{x_1} F_s\,dx$ con las condiciones isoperimétricas

$$\int_{x_0}^{x_1} F_i\,dx = l_i \qquad (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ s-1,\ s+1,\ \ldots,\ m)$$

coinciden para cualquier s $(s=0,\ 1,\ \ldots,\ n)$.

Esta propiedad se llama *principio de reciprocidad*. Por ejemplo, el problema del máximo del área de una superficie delimitada por una curva cerrada de longitud dada y el del mínimo de la longitud de una curva cerrada que delimita una superficie de área dada son recíprocos y tienen extremales comunes.

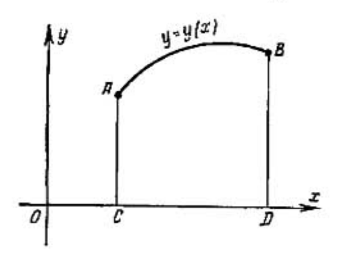


Fig. 9.1

Ejemplo 1. Hallar la curva $y=y(x)$ de longitud l dada para la cual el área S del trapecio curvilíneo $CABD$ representado en la fig. 9.1 sea máxima.

Se investiga el extremo de la funcional

$$S=\int_{x_0}^{x_1} y\,dx, \quad y(x_0)=y_0,$$

$y(x_1)=y_1$ con la condición isoperimétrica

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\,dx=l.$$

Primero se forma la funcional auxiliar

$$S^{**}=\int_{x_0}^{x_1} (y+\lambda\sqrt{1+y'^2})\,dx$$

Como la función subintegral no contiene a x, la ecuación de Euler para S^{**} tiene la primera integral $F-y'F_{y'}=C_1$ o, en este caso,

$$y+\lambda\sqrt{1+y'^2}-\frac{\lambda y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}=C_1,$$

de donde

$$y-C_1=\frac{-\lambda}{\sqrt{1+y'^2}}$$

Introduzcamos un parámetro t haciendo $y'=\operatorname{tg} t$; entonces se obtiene

$$y-C_1=-\lambda\cos t;$$

$\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg} t$, de donde $dx=\frac{dy}{\operatorname{tg} t}=\frac{\lambda \operatorname{sen} t\, dt}{\operatorname{tg} t}=\lambda \cos t\, dt$;

$$x=\lambda \operatorname{sen} t+C_2$$

De este modo, la ecuación de las extremales en forma paramétrica es:

$$x-C_2=\lambda \operatorname{sen} t,$$
$$y-C_1=-\lambda \cos t,$$

o bien, excluyendo t, se obtiene $(x-C_2)^2+(y-C_1)^2=\lambda^2$, que es una familia de circunferencias. Las constantes C_1, C_2 y λ se determinan de las condiciones

$$y(x_0)=y_0, \quad y(x_1)=y_1 \quad \text{y} \quad \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\, dx=l$$

Ejemplo 2. Hallar la curva AB de longitud dada l que delimite conjuntamente con una curva dada $y=f(x)$ el área máxima de la superficie sombreada en la fig. 9.2.

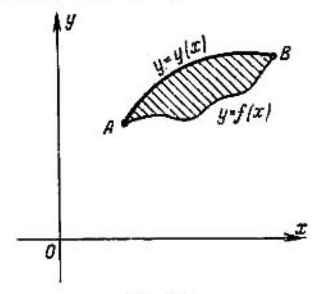


Fig. 9.2

Fig. 9.3

Hay que determinar el extremo de la funcional

$$S=\int_{x_0}^{x_1} (y-f(x))\, dx;$$

$$y(x_0)=y_0, \quad y(x_1)=y_1$$

con la condición

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\, dx=l.$$

Se forma la funcional auxiliar

$$S^{**}=\int_{x_0}^{x_1} (y-f(x)+\lambda \sqrt{1+y'^2})\, dx.$$

La ecuación de Euler para esta funcional no se diferencia de la ecuación de Euler del problema anterior, por consiguiente, en el problema dado el máximo se puede alcanzar sólo en los arcos de circunferencia.

E j e m p l o 3. Hallar la forma de una cuerda absolutamente flexible, inestirable y homogénea de longitud l, que está colgada de los puntos A y B (fig. 9.3).

Como el centro de gravedad en la posición de equilibrio debe ocupar la posición más baja, el problema se reduce a hallar el mínimo del momento estático P con respecto al eje Ox, que supondremos dirigido horizontalmente. Se investiga el extremo de la funcional $P=\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$ con la condición $\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx=l$. Se forma la funcional auxiliar

$$P^{**}=\int_{x_0}^{x_1}(y+\lambda)\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

para la cual la ecuación de Euler tiene la primera integral

$$F-y'F_{y'}=C$$

o, en este caso,

$$(y+\lambda)\sqrt{1+y'^2}-\frac{(y+\lambda)\,y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}=C_1,$$

de donde $y+\lambda=C_1\sqrt{1+y'^2}$. Introduzcamos un parámetro, haciendo $y'=\operatorname{sh} t$; entonces $\sqrt{1+y'^2}=\operatorname{ch} t$ e $y+\lambda=C_1\operatorname{ch} t$; $\frac{dy}{dx}=\operatorname{sh} t$; $dx=\frac{dy}{\operatorname{sh} t}=C_1\,dt$; $x=C_1t+C_2$, o bien, eliminando t, $y+\lambda=C_1\operatorname{ch}\frac{x-C_2}{C_1}$, que es una familia de catenarias.

La regla de resolución de problemas isoperimétricos indicada más arriba se generaliza a funcionales más complejas.

Citemos otro problema de extremo condicional: el problema sobre la regulación óptima. Consideremos la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt}=f(t,\ x(t),\ u(t)) \tag{9.6}$$

con condición inicial $x(t_0)=x_0$.

Esta ecuación contiene, además de la función (escalar o vectorial) incógnita $x(t)$, la llamada *función reguladora* $u(t)$ (escalar o vectorial). La función reguladora $u(t)$ debe ser escogida de modo que la funcional dada

$$v=\int_{t_0}^{t_1}F(x(t),\ u(t))\,dt$$

tenga un extremo.

La función $u(t)$ que da la solución del problema planteado se llama *función óptima*, o *regulación óptima*.

Este problema se puede considerar como un problema sobre un extremo condicional de la funcional v con enlaces diferenciales (9.6). Sin embargo, en los problemas prácticos las funciones óptimas se

hallan con frecuencia en la frontera del conjunto de funciones raguladoras admisibles (por ejemplo, si la función reguladora es la potencia conectada de los motores, es evidente que ésta está acotada por la potencia máxima de los motores, y en las soluciones de los problemas óptimos con frecuencia hay que conectar los motores en toda su potencia por lo menos en ciertos intervalos).

Si la función óptima pertenece a la frontera del conjunto de las funciones reguladoras admisibles, no se puede aplicar la teoría expuesta más arriba de los problemas sobre un extremo condicional, la cual presupone la posibilidad de variaciones bilaterales.

Por esto, para resolver los problemas de la regulación óptima se aplican por lo general otros métodos, desarrollados por L. S. Pontriaguin y R. Bellman.

Ejemplo. Determinar la función reguladora $u(t)$ en el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt}=v, \quad \frac{dv}{dt}=u \quad (t \text{ es el tiempo}) \tag{9.7}$$

que describe el movimiento de un punto en el plano con coordenadas x y v de modo que el punto $A(x_0, v_0)$ se desplace al punto $B(0, 0)$ en tiempo mínimo; además, $|u| \leqslant 1$ (como $u=\frac{d^2x}{dt^2}$, se puede considerar que u es la fuerza que actúa sobre un punto de masa igual a la unidad)

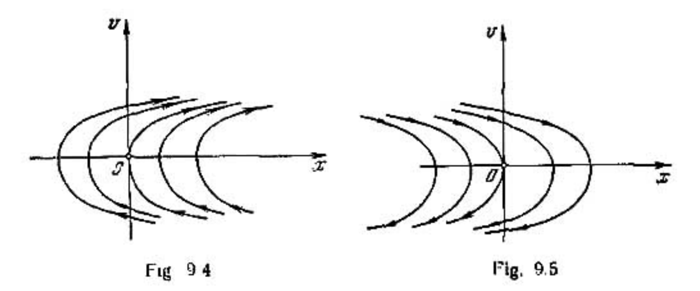


Fig. 9.4 Fig. 9.5

La función reguladora $u(t)$ es continua a trozos. Para simplificar los razonamientos supongamos que no tiene más de un punto de discontinuidad; sin embargo, el resultado definitivo es válido también sin esta hipótesis.

Es casi evidente que $u=\pm 1$ en las trayectorias óptimas, puesto que para estos valores $\left|\frac{dx}{dt}\right|$ y $\left|\frac{dv}{dt}\right|$ alcanzan los valores máximos y, en consecuencia, el punto se mueve con velocidad máxima. Haciendo $u=1$ en (9.7), se obtiene

$$v=t+C_1, \quad x=\frac{t^2}{2}+C_1t+C_2,$$

o bien $v^2=2(x-C)$, y análogamente para $u=-1$,

$$v=-t+C_1, \quad x=-\frac{t^2}{2}+C_1t+C_2, \quad v^2=-2(x-C)$$

En las figs. 9.4 y 9.5 están representadas estas familias de parábolas, y las flechas indican el sentido del movimiento al aumentar t. Si el punto $A(x_0, v_0)$ está en los arcos de las parábolas

$$v=-\sqrt{x} \quad \text{o bien} \quad v=\sqrt{-x} \tag{9.8}$$

que pasan por el origen de coordenadas (fig. 9.6), entonces la trayectoria óptimal es el arco de una de estas parábolas que une el punto A con el B. Si, en cambio, el punto A no pertenece a estas parábolas, la trayectoria optimal será el arco de parábola AC que pasa por el punto A y el arco CB de una de las parábolas (9.8) (véase la fig. 9.6, donde se muestran dos posiciones posibles de los puntos A y C).

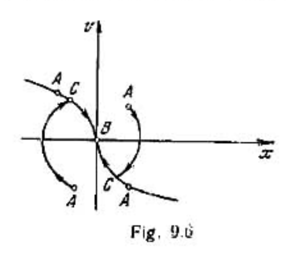


Fig. 9.6

En este problema el tiempo T invertido en el movimiento del punto desde la posición A hasta la B es una funcional que se determina de la primera de las ecuaciones (9.7), la segunda ecuación de (9.7) puede considerarse como la ecuación de un enlace. Sin embargo, sería dificultoso aplicar a este problema los métodos clásicos de resolución expuestos más arriba, puesto que la regulación óptima pertenece a la frontera de la región $|u|\leqslant 1$ de las regulaciones admisibles, y no son posibles aquí las variaciones bilaterales; además, la solución se busca en la clase de funciones reguladoras continuas o trozos.

Estas dos circunstancias son muy características para la mayoría de los problemas prácticos de regulación óptima.

EJERCICIOS DEL CAPITULO 9

1. Hallar las extremales del problema isoperimétrico $v[y(x)]=\int_0^1 (y'^2+x^2)\,dx$ con la condición $\int_0^1 y^2\,dx=2$; $y(0)=0$; $y(1)=0$

2. Hallar las líneas geodésicas del cilindro circular $r=R$.

Indicación. Es cómodo buscar la solución en coordenadas cilíndricas r, φ, z.

3. Hallar las extremales del problema isoperimétrico

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1} y'^2\,dx \quad \text{con la condición} \quad \int_{x_0}^{x_1} y\,dx=a,$$

donde a es una constante.

4. Escribir la ecuación diferencial de las extremales del problema isoperimétrico sobre el extremo de la funcional

$$v[y(x)] = \int_0^{x_1} [p(x)\, y'^2 + q(x)\, y^2]\, dx$$

con la condición $\int_0^{x_1} r(x)\, y^2\, dx = 1$; $y(0) = 0$; $y(x_1) = 0$.

5. Hallar la extremal del problema isoperimétrico sobre el extremo de la funcional

$$v[y(x),\ z(x)] = \int_0^1 (y'^2 + z'^2 - 4xz' - 4z)\, dx$$

con la condición $\int_0^1 (y'^2 - xy' - z'^2)\, dx = 2$; $y(0) = 0$; $z(0) = 0$; $y(1) = 1$; $z(1) = 1$

CAPITULO 10

Métodos directos en los problemas variacionales

§ 1 METODOS DIRECTOS

Las ecuaciones diferenciales de los problemas variacionales se integran en forma finita sólo en casos excepcionales. Por esto surge naturalmente la necesidad de obtener otros métodos de resolución de estos problemas. La idea fundamental de los llamados *métodos directos* consiste en que el problema variacional se considera como límite para cierto problema sobre el extremo de una función de un número finito de variables. Este último problema se resuelve por los métodos comunes, y luego se obtiene, mediante el paso al límite, la solución del problema variacional correspondiente.

La funcional $v[y(x)]$ se puede considerar como una función de infinito número de variables. Esta afirmación se hace completamente evidente si se supone que las funciones admisibles pueden ser desarrolladas en series de potencias:

$$y(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots,$$

o en series de Fourier:

$$y(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\operatorname{sen} nx)$$

o, en general, en algunas series del tipo

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(x),$$

donde $\varphi_n(x)$ son funciones dadas. Para determinar la función $y(x)$ que se puede representar en forma de la serie $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(x)$, es suficiente dar los valores de todos los coeficientes a_n y, en consecuencia, el valor de la funcional $v[y(x)]$ se determina en este caso fijando la sucesión infinita de números $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, es decir, la funcional es una función de un conjunto infinito de

variables:

$$v[y(x)] = \varphi(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots).$$

En consecuencia, la diferencia entre los problemas variacionales y los problemas sobre el extremo de una función de un número finito de variables consiste en que en el caso variacional hay que investigar el extremo de una función de un conjunto infinito de variables. Por esto, la idea fundamental de los métodos directos, que consiste—como ya fue dicho más arriba—en que el problema variacional se considera como límite para un problema sobre el extremo de una función de un número finito de variables, es muy natural.

L. Euler, en el primer período de sus investigaciones en el campo del análisis variacional, aplicaba un método, llamado ahora método directo de diferencias finitas. Este método en lo sucesivo no se aplicaba en absoluto durante mucho tiempo, y sólo en los últimos tres decenios renació con éxito en los trabajos de los matemáticos soviéticos (L. A. Lusternik, I. G. Petrovski y otros).

En la actualidad otro método directo, conocido por el nombre de método de Ritz—en cuyo desarrollo fue introducido un aporte significativo por los matemáticos soviéticos (N. M. Krylov, N. N. Bogoliubov y otros)—tiene una gran aplicación en la resolución de distintos problemas variacionales.

Un tercer método directo, propuesto por L. V. Kantorovich, el cual es aplicable a las funcionales que dependen de funciones de varias variables independientes, encuentra cada vez mayor aplicación en los mismos campos en que se aplica el método de Ritz.

En lo sucesivo nos detendremos sólo en estos tres métodos directos, omitiendo las demostraciones de varios enunciados. Al lector que desee estudiar con más detalle los métodos directos que se aplican en la actualidad le recomendamos los libros de L. V. Kantorovich y V. I. Krylov y de S. G. Mijlin.

§ 2. METODO DE DIFERENCIAS FINITAS DE EULER

La idea del *método de diferencias finitas* consiste en que se consideran los valores de la funcional $v[y(x)]$, por ejemplo, de

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx, \quad y(x_0) = a, \quad y(x_1) = b$$

no en las curvas arbitrarias admisibles en el problema variacional dado, sino en las líneas quebradas formadas por un número n dado de segmentos rectilíneos cuyas abscisas de los vertices están dadas:

$x_0+\Delta x$, $x_0+2\Delta x$, ..., $x_0+(n-1)\Delta x$, donde $\Delta x=\frac{x_1-x_0}{n}$ (fig. 10.1). En estas quebradas la funcional $v[y(x)]$ se transforma en una función $\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ de las ordenadas $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ de los vértices de la quebrada, puesto que ésta queda determinada por dichas ordenadas.

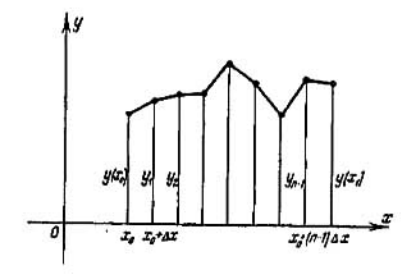


Fig. 10.1

Escojamos las ordenadas $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ de modo que la función $\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ tenga un extremo, es decir, determinemos $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ del sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}=0, \ \frac{\partial\varphi}{\partial y_2}=0, \ \ldots, \ \frac{\partial\varphi}{\partial y_{n-1}}=0,$$

y luego pasemos al límite para $n\to\infty$. En el límite se obtiene — imponiendo ciertas limitaciones a la función F — la solución del problema variacional.

Sin embargo, es más cómodo calcular el valor de la funcional $v[y(x)]$ en las quebradas indicadas más arriba en forma aproximada, por ejemplo, sustituir en el problema simple la integral

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_0+k\Delta x}^{x_0+(k+1)\Delta x} F\left(x, y, \frac{y_{k+1}-y_k}{\Delta x}\right)dx$$

por la suma integral

$$\sum_{i=1}^{n} F\left(x_i, y_i, \frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)\Delta x.$$

Deduzcamos, en calidad de ejemplo, la ecuación de Euler para la funcional

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$$

En este caso en las quebradas consideradas será

$$v[y(x)] \approx \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} F\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}\right)\Delta x.$$

Como de y_i dependen solamente dos sumandos de esta suma: el i-ésimo y el $(i-1)$-ésimo,

$$F\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}\right)\Delta x \quad \text{y} \quad F\left(x_{i-1}, y_{i-1}, \frac{y_i-y_{i-1}}{\Delta x}\right)\Delta x,$$

las ecuaciones $\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}=0 \ (i=1, 2, \ldots, n-1)$ toman la forma

$$F_y\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}\right)\Delta x + F_{y'}\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}\right)\left(-\frac{1}{\Delta x}\right)\Delta x +$$
$$+ F_{y'}\left(x_{i-1}, y_{i-1}, \frac{y_i-y_{i-1}}{\Delta x}\right)\frac{1}{\Delta x}\Delta x = 0 \ (i=1, 2, \ldots, (n-1)),$$

ó

$$F_y\left(x_i, y_i, \frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right) - \frac{F_{y'}\left(x_i, y_i, \frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right) - F_{y'}\left(x_{i-1}, y_{i-1}, \frac{\Delta y_{i-1}}{\Delta x}\right)}{\Delta x} = 0,$$

o bien

$$F_y\left(x_i, y_i, \frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right) - \frac{\Delta F_{y'}}{\Delta x} = 0.$$

Pasando al límite para $n \to \infty$, se obtiene la ecuación de Euler

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0,$$

a la cual debe satisfacer la función $y(x)$ buscada que realiza el extremo. Análogamente se puede obtener la condición necesaria fundamental de extremo en otros problemas variacionales.

Si no se efectúa el paso al límite, del sistema de ecuaciones $\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}=0 \ (i=1, 2, \ldots, n-1)$ se pueden determinar las ordenadas $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ buscadas, obteniendo así una quebrada que es la solución aproximada del problema variacional.

§ 3. MÉTODO DE RITZ

La idea del *método de Ritz* consiste en que los valores de cierta funcional $v[y(x)]$ se consideran no en las curvas arbitrarias admisibles del problema variacional dado, sino sólo en todas las combinaciones lineales $y_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i W_i(x)$ con coeficientes constantes posibles formadas por las n primeras funciones de cierta sucesión

elegida de funciones

$$W_1(x),\ W_2(x),\ \ldots,\ W_n(x),\ \ldots$$

Las funciones $y_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i W_i(x)$ deben ser admisibles en el problema considerado, lo cual impone ciertas limitaciones a la elección de la sucesión de funciones $W_i(x)$. En estas combinaciones lineales, la funcional $v[y(x)]$ se transforma en una función $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ de los coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Estos coeficientes se escogen de modo que la función $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ tenga un extremo; en consecuencia, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ deben ser determinados del sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_i}=0 \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Pasando al límite para $n\to\infty$, se obtiene — en caso de que exista el límite — la función $y=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i W_i(x)$ que es (bajo ciertas limitaciones impuestas a la funcional $v[y(x)]$ y a la sucesión $W_1(x)$, $W_2(x), \ldots, W_n(x), \ldots$) la solución exacta del problema variacional considerado. Si no efectuamos el paso al límite, sino que nos limitamos sólo a los n primeros términos $y_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i W_i(x)$, obtenemos una solucion aproximada del problema variacional.

Si por este método se determina un mínimo absoluto de la funcional, el valor aproximado de dicho mínimo se halla por exceso, puesto que el mínimo de la funcional para funciones admisibles arbitrarias no es mayor que el mínimo de ésta para una parte de esta clase de curvas admisibles: las curvas del tipo $y_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i W_i(x)$. Al hallar por el mismo método un máximo de la funcional se obtiene, por las mismas causas, una aproximación por defecto de dicho máximo.

Para que las funciones $y_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i W_i(x)$ sean admisibles, ante todo es necesario satisfacer las condiciones de frontera (tampoco hay que olvidarse, claro está, de las otras limitaciones que pueden imponerse a las funciones admisibles, por ejemplo, limitaciones sobre la continuidad o la derivabilidad). Si las condiciones de frontera son lineales y homogéneas, por ejemplo, si $y(x_0)=y(x_1)=0$, o bien

$$\beta_{1j}y(x_j)+\beta_{2j}y'(x_j)=0 \quad (j=0,1),$$

donde las β_{ij} son constantes, en el problema más simple, lo más

sencillo es escoger las funciones coordenadas de modo que satisfagan estas condiciones de frontera. Es evidente que entonces $y_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i W_i(x)$ para α_i cualesquiera también satisfarán las mismas condiciones de frontera. Supongamos, por ejemplo, que las condiciones de frontera tienen la forma $y(x_0) = y(x_1) = 0$; entonces se puede tomar

$$W_i(x) = (x - x_0)(x - x_1)\varphi_i(x)$$

como funciones coordenadas, donde $\varphi_i(x)$ son ciertas funciones continuas, o bien

$$W_k(x) = \operatorname{sen} \frac{k\pi(x - x_0)}{x_1 - x_0} \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

u otras funciones que satisfagan las condiciones

$$W_i(x_0) = W_i(x_1) = 0$$

Si las condiciones no son homogéneas, por ejemplo, $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$, donde por lo menos uno de los números y_0 ó y_1 es diferente de cero, lo más sencillo es buscar la solución del problema variacional en la forma

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i W_i(x) + W_0(x),$$

donde $W_0(x)$ satisface las condiciones de frontera dadas, $W_0(x_0) = y_0$, $W_0(x_1) = y_1$, y las demás $W_i(x)$ satisfacen las condiciones de frontera homogéneas correspondientes, es decir, en este caso $W_i(x_0) = W_i(x_1) = 0$. Es evidente que con esta elección las funciones $y_n(x)$ satisfarán para α_i cualesquiera las condiciones de frontera dadas. Como función $W_0(x)$ se puede tomar, por ejemplo, la función lineal

$$W_0(x) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0$$

La resolución del sistema de ecuaciones $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_i} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ es, en general, un problema muy complejo. Este se simplifica considerablemente si se estudia el extremo de una funcional v cuadrática respecto a la función incógnita y a sus derivadas, puesto que en este caso las ecuaciones $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_i} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ son lineales con respecto a α_i.

La elección de la sucesión de funciones $W_1, W_2, \ldots, W_n, \ldots$, llamadas funciones coordenadas, influye en forma considerable en el grado de complejidad de los cálculos ulteriores; por esto, el éxito de la aplicación de este método depende mucho de la elección adecuada del sistema de funciones coordenadas.

Todo lo que acabamos de exponer se aplica también a las funcionales $v[z(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$—en este caso, claro está, las funciones W_i deben depender de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$—así como a las funcionales que dependen de varias funciones.

El método de Ritz se aplica frecuentemente para la resolución exacta o aproximada de problemas de la física matemática. Por ejemplo, si se pide hallar en cierta región D la solución de la ecuación de Poisson

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f(x, y)$$

para valores dados de z en la frontera de la región D, se puede sustituir este problema por el problema variacional sobre el extremo de una funcional, para la cual la ecuación dada sea la ecuación de Ostrogradski (véase la pág. 322). En el caso considerado esta funcional será

$$\iint_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+2zf(x, y)\right] dxdy.$$

La función z, que realiza el extremo de esta funcional, se puede hallar por cualquier método directo.

Los problemas de la física matemática se reducen con frecuencia al estudio del extremo de funcionales cuadráticos con respecto a la función incógnita y a sus derivadas y, por lo tanto, como fue indicado más arriba, la aplicación del método de Ritz en este caso se simplifica.

El problema de la convergencia de las aproximaciones obtenidas por el método de Ritz a la solución buscada del problema variacional, así como de la apreciación del grado de exactitud de estas aproximaciones, es muy complejo. Por esto aquí nos limitaremos sólo a algunas observaciones, recomendando al lector que desee estudiar este problema con mayor detalle los libros de Mijlin y de Kantorovich y Krylov.

Tomaremos, para fijar ideas, la funcional

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))\,dx$$

y supondremos que se estudia su mínimo. Consideraremos que la sucesión de funciones coordenadas $W_1(x), W_2(x), \ldots, W_n(x), \ldots$ es completa en el sentido que cada función admisible puede ser aproximada con cualquier grado de exactitud en el sentido de proximidad de primer orden por una combinación lineal $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k W_k(x)$ de funciones coordenadas, donde n es suficientemente grande. En-

tonces es evidente que por el método de Ritz se pueden obtener las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$, donde $y_n=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k W_k(x)$, que formen la llamada sucesión minimizante, es decir, la sucesión para la cual los valores de la funcional

$$v[y_1],\ v[y_2],\ \ldots,\ v[y_n],\ \ldots$$

converjan al mínimo, o a la cota inferior de los valores de la funcional $v[y(x)]$. Sin embargo de la relación $\lim_{n\to\infty} v[y_n(x)]=$ $=\min v[y(x)]$, no se deduce de ningún modo que $\lim_{n\to\infty} y_n(x)=y(x)$. La sucesión minimizante puede no tender a la función que realiza el extremo en la clase de funciones admisibles

En efecto, la funcional

$$v[y_n(x)]=\int_{x_0}^{x_1} F(x,\ y_n(x),\ y_n'(x))\,dx$$

puede diferenciarse poco de

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1} F(x,\ y(x),\ y'(x))\,dx$$

no sólo cuando $y_n(x)$ sea cercana a $y(x)$ en el sentido de proximidad de primer orden en todo el segmento de integración, sino

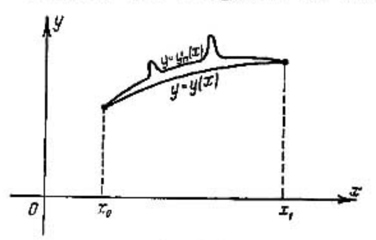


Fig. 10.2

también cuando las funciones $y_n(x)$ e $y(x)$ o sus derivadas se diferencien considerablemente en partes suficientemente pequeñas del segmento (x_0, x_1), permaneciendo cercanas en el resto de dicho segmento (fig. 10.2). Por esto la sucesión minimizante $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ puede no tener siquiera límite en la clase de funciones admisibles, a pesar de que las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ sean admisibles

Las condiciones de convergencia de la sucesión y_n obtenida por el método de Ritz a la solución del problema variacional y la apreciación de la rapidez de la convergencia para funcionales concretas, que se encuentran con frecuencia en la práctica, fueron desarrollados por N. M. Krylov y N. N. Bogoliubov. Así por ejemplo, para las funcionales del tipo

$$v=\int_0^1 [p(x)y'^2+q(x)y^2+f(x)y]\,dx; \quad y(0)=y(1)=0,$$

donde $p(x)>0$; $q(x)\geqslant 0$, que se encuentran con frecuencia en las aplicaciones, fue demostrada no sólo la convergencia de las aproximaciones que se obtienen por el método de Ritz a la función $y(x)$ que realiza el mínimo de la funcional, para las funciones coordenadas

$$W_k(x)=\sqrt{2}\operatorname{sen} k\pi x \quad (k=1, 2, \ldots),$$

sino también fueron obtenidas acotaciones muy exactas del error $|y(x)-y_n(x)|$

Citaremos una de estas acotaciones del máximo de $|y(x)-y_n(x)|$ en el segmento $(0,1)$:

$$\max|y-y_n|\leqslant\frac{1}{n+1}\left[\max p(x)+\frac{\max q(x)}{(n+1)^2\pi^4}\right]^{\frac{1}{4}}\frac{\sqrt{\int_0^1 f^2(x)dx}}{\pi^2\sqrt{2}\,[\min p(x)]^{3/2}}\times$$
$$\times\left[\max|p'(x)|+\frac{1}{\pi}\max q(x)+\pi\min p(x)\right]\text{*)}.$$

Incluso en este caso, relativamente sencillo, la apreciación del error es muy compleja. Por esto, para la acotación de la exactitud de los resultados obtenidos por el método de Ritz o por otros métodos directos, por lo general se aplica el siguiente método, imperfecto, claro está, teóricamente, pero suficientemente seguro desde el punto de vista práctico: después de calcular $y_n(x)$ e $y_{n+1}(x)$, se comparan entre sí en varios puntos del segmento $[x_0, x_1]$. Si sus valores coinciden en los límites de la exactitud exigida, se considera que la solución del problema variacional considerado es igual, con la exactitud indicada, a $y_n(x)$. Si, en cambio, los valores de $y_n(x)$ e $y_{n+1}(x)$ no coinciden por lo menos en algunos de los puntos escogidos en los límites de la exactitud dada, se calcula $y_{n+2}(x)$ y se comparan los valores de $y_{n+1}(x)$ e $y_{n+2}(x)$. Este proceso se continúa hasta que coincidan los valores de $y_{n+k}(x)$ e $y_{n+k+1}(x)$ en los límites de la exactitud dada.

*) Vease el libro de Kantorovich y Krylov.

Ejemplo 1. Al estudiar las oscilaciones de una cuña fija de espesor constante (fig. 10.3), hay que analizar el extremo de la funcional

$$v=\int_0^1 (ax^3y''^2-bxy^2)dx, \quad y(1)=y'(1)=0,$$

donde a y b son constantes positivas. Como funciones coordenadas que satisfagan las condiciones de frontera se puede tomar

$$(x-1)^2, \ (x-1)^2x, \ (x-1)^2x^2, \ \ldots, \ (x-1)^2x^{k-1}, \ \ldots,$$

por consiguiente,

$$y_n=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k (x-1)^2x^{k-1}.$$

Fig. 10.3

Limitándonos sólo a los dos primeros términos, tendremos

$$y_2=(x-1)^2\,(\alpha_1+\alpha_2x);$$

entonces

$$v_2=v[y_2]=\int_0^1 [ax^3(6\alpha_2x+2\alpha_1-4\alpha_2)^2-bx(x-1)^4(\alpha_1+\alpha_2x)^2]\,dx=$$

$$=a\left[(\alpha_1-2\alpha_2)^2+\frac{24}{5}\alpha_2(\alpha_1-2\alpha_2)+6\alpha_2^2\right]-b\left(\frac{\alpha_1^2}{30}+\frac{2\alpha_1\alpha_2}{105}+\frac{\alpha_2^2}{280}\right).$$

Las condiciones necesarias de extremo $\frac{\partial v_2}{\partial \alpha_1}=0$; $\frac{\partial v_2}{\partial \alpha_2}=0$ toman en este caso la forma

$$\left(a-\frac{b}{30}\right)\alpha_1+\left(\frac{2}{5}a-\frac{b}{105}\right)\alpha_2=0$$

y

$$\left(\frac{2}{5}a-\frac{b}{105}\right)\alpha_1+\left(\frac{2}{5}a-\frac{b}{280}\right)\alpha_2=0$$

Para obtener soluciones diferentes de la solución $\alpha_1=\alpha_2=0$, la cual corresponde a la ausencia de oscilaciones de la cuña, es necesario que el determinante de este sistema lineal homogéneo de ecuaciones sea igual a cero.

$$\begin{vmatrix} a-\frac{b}{30} & \frac{2}{5}a-\frac{b}{105} \\ \frac{2}{5}a-\frac{b}{105} & \frac{2}{5}a-\frac{b}{280} \end{vmatrix}=0,$$

o bien

$$\left(a-\frac{b}{30}\right)\left(\frac{2}{5}a-\frac{b}{280}\right)-\left(\frac{2}{5}a-\frac{b}{105}\right)^2=0.$$

Esta ecuación se llama ecuación de las frecuencias. Esta determina la frecuencia b de las oscilaciones propias de la cuña, que se describen por la función

$$u(x, t)=y(x)\cos bt$$

La menor de las raíces b_1 y b_2 de la ecuación de las frecuencias da el valor aproximado del tono principal de las oscilaciones de la cuña.

Ejemplo 2. En los problemas relacionados con la torsión de un cilindro o de un prisma, hay que analizar el extremo de la funcional

$$v[z(x,\ y)]=\iint_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}-y\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}+x\right)^2\right]\partial x\,\partial y.$$

Para un cilindro de sección transversal elíptica la región de integración D estará limitada por la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. En este caso, tomando sólo una función coordenada, xy, se obtiene

$$z_1=\alpha xy,\quad v[z_1]=v_1=\frac{\pi ab}{4}[(\alpha+1)^2a^2+(\alpha-1)^2b^2].$$

La condición necesaria de extremo $\frac{\partial v_1}{\partial \alpha}=0$ toma en este caso la forma $(\alpha+1)a^2+$ $+(\alpha-1)b^2=0$, de donde

$$\alpha=\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2},\quad z_1=\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}\,xy.$$

Ejemplo 3. Si en las condiciones del ejemplo anterior la región D es un rectángulo de lados $2a$ y $2b$, $-a\leqslant x\leqslant a$; $-b\leqslant y\leqslant b$, entonces tomando xy, xy^3, x^3y, como funciones coordenadas, es decir, haciendo

$$z_3=\alpha_1xy+\alpha_2xy^3+\alpha_3x^3y,$$

se obtiene

$$v_3=v[z_3]=\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\left[\left(\frac{\partial z_3}{\partial x}-y\right)^2+\left(\frac{\partial z_3}{\partial y}+x\right)^2\right]dx\,dy=$$

$$=\frac{4}{3}ab^3(\alpha_1-1)^2+4ab^5\left(\frac{b^2}{7}+\frac{3a^2}{5}\right)\alpha_2^2+4a^5b\left(\frac{a^2}{7}+\frac{3b^2}{5}\right)\alpha_3^2+$$
$$+\frac{4}{3}a^3b(\alpha_1+1)^2+\frac{8}{5}ab^5(\alpha_1-1)\alpha_2+\frac{8}{5}a^3b(\alpha_1+1)\alpha_2-$$
$$-\frac{8}{5}a^5b(\alpha_1+1)\alpha_3-\frac{8}{5}a^3b^3(a^2+b^2)\alpha_2\alpha_3-\frac{8}{3}a^3b^3(\alpha_1-1)\alpha_3.$$

Las condiciones necesarias de extremo $\frac{\partial v_3}{\partial \alpha_1}=0$, $\frac{\partial v_3}{\partial \alpha_2}=0$, $\frac{\partial v_3}{\partial \alpha_3}=0$ permiten calcular α_1, α_2 y α_3:

$$\alpha_1=\frac{7(a^6-b^6)+135a^2b^2(a^2-b^2)}{7(a^6+b^6)+107a^2b^2(a^2+b^2)},$$
$$\alpha_2=-\frac{7a^2(3a^2+35b^2)}{21(a^6+b^6)+321a^2b^2(a^2+b^2)},$$
$$\alpha_3=-\frac{7b^2(35a^2+3b^2)}{21(a^6+b^6)+321a^2b^2(a^2+b^2)}.$$

Ejemplo 4. Hallar la solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f(x,\ y)$$

dentro del rectángulo D, $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant b$, que se anule en la frontera de D. Se supone que la función $f(x,\ y)$ se puede desarrollar en serie doble de Fourier

que converge uniformemente dentro del rectángulo considerado:

$$f(x, y)=\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\beta_{pq}\operatorname{sen} p\frac{\pi x}{a}\operatorname{sen} q\frac{\pi y}{b}.$$

Este problema de frontera se puede reducir a un problema variacional, es decir, escoger una funcional para la cual la ecuación dada sea la ecuación de Ostrogradski, y luego hallar, mediante algún método directo, la función que realiza el extremo de esta funcional, hallando así la solución del problema de frontera inicial. Como se comprueba fácilmente,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f(x, y)$$

es la ecuación de Ostrogradski para la funcional

$$v[z(x, y)]=\iint_D\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+2zf(x, y)\right]dx\,dy$$

(véase la pág. 322). La condición de frontera se mantiene, $z=0$ en la frontera de la región D. Estudiemos el extremo de esta funcional por el método de Ritz. Tomemos como sistema de funciones coordenadas a

$$\operatorname{sen} m\frac{\pi x}{a}\operatorname{sen} n\frac{\pi y}{b}\qquad (m, n=1, 2, \ldots).$$

Cada una de estas funciones, así como sus combinaciones lineales, satisfacen la condición de frontera $z=0$ en la frontera de la región D. Estas funciones también poseen la propiedad de ser completas. Tomando

$$z_{n, m}=\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{m}\alpha_{pq}\operatorname{sen} p\frac{\pi x}{a}\operatorname{sen} q\frac{\pi y}{b},$$

tendremos

$$v[z_{nm}]=\int_0^a\int_0^b\left[\left(\frac{\partial z_{nm}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z_{nm}}{\partial y}\right)^2+\right.$$

$$\left.+2z_{nm}\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\beta_{pq}\operatorname{sen} p\frac{\pi x}{a}\operatorname{sen} q\frac{\pi y}{b}\right]dx\,dy=$$

$$=\frac{\pi^2 ab}{4}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{m}\left(\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}\right)\alpha_{pq}^2+\frac{ab}{2}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{m}\alpha_{pq}\beta_{pq}.$$

Este resultado puede obtenerse fácilmente si se considera que las funciones coordenadas $\operatorname{sen} p\frac{\pi x}{a}\operatorname{sen} q\frac{\pi y}{b}$ $(p, q=1, 2, \ldots)$ forman un sistema ortogonal en la región D, es decir,

$$\iint_D\operatorname{sen} p\frac{\pi x}{a}\operatorname{sen} q\frac{\pi y}{b}\operatorname{sen} p_1\frac{\pi x}{a}\operatorname{sen} q_1\frac{\pi y}{b}\,dx\,dy=0$$

para cualesquiera p, q, p_1, q_1 enteros positivos, a excepción del caso $p=p_1$ y $q=q_1$. Para $p=p_1$ y $q=q_1$, se obtiene

$$\iint_D \operatorname{sen}^2 p\frac{\pi x}{a}\operatorname{sen}^2 q\frac{\pi y}{b}\,dx\,dy=\frac{ab}{4}$$

Por esto, de todos los términos bajo el signo integral doble, igual a $v[z_{nm}]$, hay que considerar sólo los que contienen los cuadrados de las funciones $\operatorname{sen} p\frac{\pi x}{a}\operatorname{sen} q\frac{\pi y}{b}$, $\operatorname{sen} p\frac{\pi x}{a}\cos q\frac{\pi y}{b}$ y $\cos p\frac{\pi x}{a}\operatorname{sen} q\frac{\pi y}{b}$. Es evidente que $v[z_{nm}]$ es una función $\varphi(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{nm})$ de los coeficientes $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{nm}$, los cuales se determinan de la condición necesaria fundamental de extremo

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_{pq}}=0\ (p=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ q=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$$

Este sistema tiene en este caso la forma

$$\alpha_{pq}\left(\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}\right)\pi^2+\beta_{pq}=0\ (p=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ q=1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

de donde

$$\alpha_{pq}=-\frac{\beta_{pq}}{\pi^2\left(\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}\right)}$$

Por consiguiente,

$$z_{nm}=-\frac{1}{\pi^2}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{m}\frac{\beta_{pq}}{\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}}\operatorname{sen} p\frac{\pi x}{a}\operatorname{sen} q\frac{\pi y}{b}.$$

Pasando al límite para n y m tendientes a infinito, se obtiene en este caso la solución exacta:

$$z=-\frac{1}{\pi^2}\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\beta_{pq}}{\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}}\operatorname{sen} p\frac{\pi x}{a}\operatorname{sen} q\frac{\pi y}{b}.$$

§ 4. METODO DE KANTOROVICH

Al aplicar el método de Ritz a las funcionales $v[z(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$ que dependen de funciones de varias variables independientes, se escoge un sistema de funciones coordenadas

$$W_1(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),\ W_2(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),\ \ldots,\ W_m(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),\ \ldots$$

y se busca la solución aproximada del problema variacional en la forma $z_m=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k W_k(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, donde los coeficientes α_k son constantes.

El *método de Kantorovich* también exige la determinación de un sistema de funciones coordenadas

$$W_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), W_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, W_m(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots$$

y la solución aproximada también se busca en la forma

$$z_m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k(x_i) W_k(x_1, x_2, \ldots, x_n);$$

sin embargo, los coeficientes $\alpha_k(x_i)$ no son constantes, sino funciones incógnitas de una de las variables independientes. La funcional $v[z]$ se transforma, en la clase de las funciones de la forma

$$z_m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k(x_i) W_k(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

en una funcional $\bar{v}[\alpha_1(x_i), \alpha_2(x_i), \ldots, \alpha_m(x_i)]$ que depende de m funciones de una variable independiente

$$\alpha_1(x_i), \alpha_2(x_i), \ldots, \alpha_m(x_i).$$

Las funciones $\alpha_1(x_i), \alpha_2(x_i), \ldots, \alpha_m(x_i)$ se escogen de modo que la funcional $\bar{v}$ tenga un extremo.

Si luego de esto se pasa al límite para $m \to \infty$, se puede obtener, bajo ciertas condiciones, la solución exacta. Si no se pasa al límite, por este método se puede obtener una solución aproximada y además, en general es mucho más exacta que al aplicar el metodo de Ritz con las mismas funciones coordenadas y con el mismo número m de términos

La mayor exactitud de este método se obtiene en virtud de que la clase de funciones $z_m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k(x_i) W_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con $\alpha_k(x_i)$ variables es mucho mayor que la clase de funciones

$$z_m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k W_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

con α_k constantes y, en consecuencia, entre las funciones del tipo

$$z_m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k(x_i) W_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

se pueden escoger funciones que aproximen mejor la solución del problema variacional, que entre las funciones del tipo

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k W_k(x_1, x_2, \ldots, x_n), \text{ donde las } \alpha_k \text{ son constantes.}$$

Supongamos, por ejemplo, que se pide estudiar el extremo de la funcional

$$v=\int_{x_0}^{x_1}\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} F\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)dx\,dy,$$

tomada sobre la región D delimitada por las curvas $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$ y por las dos rectas $x=x_0$ y $x=x_1$ (fig. 10.4). En la frontera de la región D se dan los valores de la función $z(x,\ y)$. Escojamos la sucesión de funciones coordenadas:

$$W_1(x,\ y),\ W_2(x,\ y),\ \ldots,\ W_n(x,\ y),\ \ldots$$

Limitándonos primeramente a m primeras funciones de esta sucesión, buscaremos la solución del problema variacional en forma

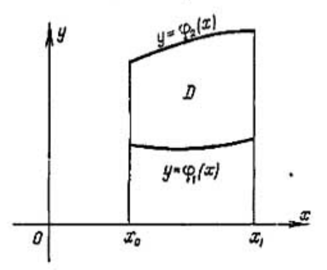


Fig. 10.4

de la suma $z_m=\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k(x)\,W_k(x,\ y)$, o bien, cambiando la notación $\alpha_k(x)$ por la $u_k(x)$, se obtiene:

$$z_m(x,\ y)=u_1(x)\,W_1(x,\ y)+u_2(x)\,W_2(x,\ y)+\ldots+u_m(x)\,W_m(x,\ y),$$

donde las W_k son las funciones escogidas, y u_k, las incógnitas, que determinaremos de modo que la funcional v tenga un extremo. Se tiene

$$v[z_m(x,\ y)]=\int_{x_0}^{x_1}dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} F\left(x,\ y,\ z_m(x,\ y),\ \frac{\partial z_m}{\partial x},\ \frac{\partial z_m}{\partial y}\right)dy$$

Como la función subintegral es una función conocida de y, la integración por y puede ser efectuada, y la funcional $v[z_m(x,\ y)]$ será una funcional de la forma

$$v[z_m(x,\ y)]=\int_{x_0}^{x_1}\varphi(x,\ u_1(x),\ \ldots,\ u_m(x),\ u_1',\ \ldots,\ u_m')\,dx.$$

Las funciones $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_m(x)$ se eligen de modo que la funcional $v[z_m(x, y)]$ tenga un extremo. En consecuencia, $u_i(x)$ deben satisfacer el sistema de ecuaciones de Euler:

$$\varphi_{u_1} - \frac{d}{dx}\varphi_{u_1'} = 0,$$
$$\varphi_{u_2} - \frac{d}{dx}\varphi_{u_2'} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_{u_m} - \frac{d}{dx}\varphi_{u_m'} = 0.$$

Las constantes arbitrarias se eligen de modo que $z_m(x, y)$ satisfagan las condiciones de frontera dadas en las rectas $x = x_0$ y $x = x_1$.

Ejemplo 1. Analizar el extremo de la funcional

$$v[z(x, y)] = \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2z\right] dx\, dy;$$

además, $z = 0$ en la frontera de la región de integración. Dicha región es el rectángulo $-a \leqslant x \leqslant a$; $-b \leqslant y \leqslant b$. La solución se busca en la forma $z_1 = (b^2 - y^2)\, u(x)$; entonces las condiciones de frontera serán satisfechas en las rectas $y = \pm b$. La funcional $v[z_1]$ es igual a

$$v[z_1] = \int_{-a}^{a}\left[\frac{16}{15} b^5 u'^2 + \frac{8}{3} b^3 u^2 - \frac{8}{3} b^3 u\right] dx.$$

La ecuación de Euler para esta funcional

$$u'' - \frac{5}{2b^2}\, u = -\frac{5}{4b^2}$$

es una ecuación lineal con coeficientes constantes, cuya solución general tiene la forma

$$u = C_1 \operatorname{ch}\sqrt{\frac{5}{2}}\,\frac{x}{b} + C_2 \operatorname{sh}\sqrt{\frac{5}{2}}\,\frac{x}{b} + \frac{1}{2}.$$

Las constantes C_1 y C_2 se determinan de las condiciones de frontera $z(-a) = z(a) = 0$, de donde $C_2 = 0$, $C_1 = -\dfrac{1}{2\operatorname{ch}\sqrt{\frac{5}{2}}\,\frac{a}{b}}$, y obtenemos en definitiva:

$$u = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\operatorname{ch}\sqrt{\frac{5}{2}}\,\frac{x}{b}}{\operatorname{ch}\sqrt{\frac{5}{2}}\,\frac{a}{b}}\right);$$

por consiguiente,

$$z_1=\frac{1}{2}(b^2-y^2)\left(1-\frac{\operatorname{ch}\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{x}{b}}{\operatorname{ch}\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{a}{b}}\right)$$

Si es necesario obtener una respuesta más exacta, se puede buscar la solución en la forma

$$z_2=(b^2-y^2)\,u_1(x)+(b^2-y^2)^2\,u_2(x)$$

Ejemplo 2. Hallar la solución continua de la ecuación $\Delta z=-1$ en la región D, que es un triángulo equilátero delimitado por las rectas $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$ y $x=b$ (fig. 10.5), que se anule en la frontera de esta región.

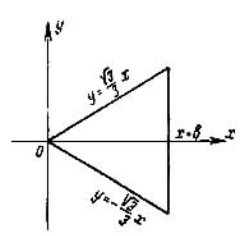


Fig. 10.5

La ecuación $\Delta z=-1$ es la ecuación de Ostrogradski para la funcional

$$v[z]=\int_0^b\int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}x}^{\frac{\sqrt{3}}{3}x}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-2z\right]dx\,dy$$

y $z=0$ en la frontera de la región de integración. Según el método de Kantorovich, buscaremos la primera aproximación en la forma

$$z_1=\left[y^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)^2\right]u(x)$$

Eligiendo z_1 de este modo, las condiciones de frontera se satisfacen en las rectas $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$.

La funcional $v[z_1]$, luego de efectuar la integración con respecto a y, toma la forma

$$v[z_1]=\frac{8\sqrt{3}}{405}\int_0^b(2x^5u'^2+10x^4uu'+30x^3u^2+15x^3u)\,dx.$$

La ecuación de Euler para esta funcional será $x^2u''+5xu'-5u=\frac{15}{4}$. Las ecuaciones lineales de este tipo en la teoría de las ecuaciones diferenciales se llaman ecuaciones de Euler (pág. 114).

Una solución particular de esta ecuación no homogénea es evidente: $u=-\frac{3}{4}$. La solución de la ecuación homogénea correspondiente se busca en la forma $u=x^k$, y se obtiene en definitiva $u=C_1x+C_2x^{-5}-\frac{3}{4}$. Como cerca del punto

$x=0$ la solución u debe ser acotada, C_2 debe ser escogido igual a cero; además, de la condición $u(b)=0$ se obtiene $C_1=-\frac{3}{4b}$. De este modo,

$$z_1=-\frac{3}{4}\left(1-\frac{x}{b}\right)\left(y^2-\frac{1}{3}x^2\right).$$

Observación. Para la resolución aproximada de problemas de frontera se aplica con frecuencia otro método directo, no variacional: el método de B. G. Galiorkin. Este es particularmente cómodo en la resolución de problemas lineales de frontera, pero puede ser aplicado también a muchos problemas no lineales. Para fijar ideas, expondremos el *método de Galiorkin* aplicado a las ecuaciones lineales de segundo orden

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \qquad (10.1)$$

que se encuentran con particular frecuencia en la práctica, con las condiciones de frontera $y(x_0)=0$, $y(x_1)=0$ (las condiciones de frontera no homogéneas $y(x_0)=y_0$, $y(x_1)=y_1$ se reducen fácilmente a las homogéneas mediante el cambio de variables

$$z=y-y_0-\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0))$$

Escribamos la ecuación (10.1) en forma compacta como

$$L(y)=f(x)$$

Tomemos un sistema de funciones continuas

$$\omega_1(x),\ \omega_2(x),\ \ldots,\ \omega_n(x),\ \ldots \qquad (10.2)$$

linealmente independientes que satisfacen las condiciones de frontera $\omega_n(x_0)=\omega_n(x_1)=0$ $(n=1, 2, \ldots)$, completo en el segmento $[x_0, x_1]$. Buscaremos la solución aproximada del problema de frontera en forma de la combinación lineal de las primeras n funciones del sistema (10.2):

$$y_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\omega_i(x).$$

Se sustituyen las y_n en la ecuación (10.1) y se eligen los coeficientes α_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ de modo que la función

$$L\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\omega_i(x)\right)-f(x)$$

sea ortogonal en el segmento $[x_0, x_1]$ a cada función $\omega_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$:

$$\int_{x_0}^{x_1}\left[L\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\omega_i(x)\right)-f(x)\right]\omega_i(x)\,dx=0 \quad (i=1, 2, \ldots, n). \qquad (10.3)$$

Es natural esperar que y_n tienda para $n \to \infty$ a la solución exacta,

$$\tilde{y} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i w_i(x),$$

puesto que si la serie obtenida converge y puede ser derivada dos veces término a término, la función $L(\tilde{y}) - f(x)$ es ortogonal en el segmento $[x_0, x_1]$ a cada función $w_i(x)$ del sistema (10.2), y como dicho sistema es completo, entonces $L(\tilde{y}) - f(x) \equiv 0$; esto precisamente significa que $\tilde{y}$ es la solución de la ecuación (10.1). Es evidente que $\tilde{y}$ satisface también las condiciones de frontera $\tilde{y}(x) = \tilde{y}(x_1) = 0$ (puesto que todas las $w_i(x_0) = w_i(x_1) = 0$).

Muy raras veces se pueden determinar todas las α_i del sistema (10.3) lineal con respecto a éstas y pasar al límite para $n \to \infty$; por esto, por lo general hay que limitarse a un n finito, y además no muy grande ($n = 2, 3, 4, 5$, y a veces incluso $n = 1$).

En este caso, claro está, hay que tomar sólo n funciones $w_i(x)$; por esto, la condición de que el sistema sea completo no es necesaria, y hay que elegir dichas funciones sólo de modo que sean linealmente independientes y que satisfagan las condiciones de frontera

$$w_i(x_0) = w_i(x_1) = 0.$$

Con frecuencia se toman polinomios en calidad de estas funciones, llamadas funciones coordenadas:

$$(x_0 - x_0)(x - x_1),\ (x - x_0)^2 (x - x_1),\ (x - x_0)^3 (x - x_1),\ \ldots \\ \ldots,\ (x - x_0)^n (x - x_1),\ \ldots \qquad (10.4)$$

(en este caso es cómodo trasladar el origen de coordenadas al punto x_0, y entonces $x_0 = 0$ en (10.4)), o bien funciones trigonométricas,

$$\operatorname{sen} \frac{n\pi (x - x_0)}{x_1 - x_0} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Este método es aplicable a las ecuaciones de cualquier orden n, a los sistemas de ecuaciones y a las ecuaciones en derivadas parciales.

EJERCICIOS DEL CAPITULO 10

1. Hallar la solución aproximada de la ecuación $\Delta z = -1$ dentro del cuadrado $-a \leqslant x \leqslant a$, $-a \leqslant y \leqslant a$ que se anule en la frontera de éste.

Indicación. El problema se reduce al análisis del extremo de la funcional

$$\iint_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 - 2z \right] dx\, dy.$$

Se puede buscar la solución aproximada en la forma

$$z_0 = \alpha (x^2 - a^2)(y^2 - a^2).$$

2. Hallar la solución aproximada del problema sobre el extremo de la funcional

$$v[y(x)]=\int_0^1 (x^3y''^2+100xy^2-20xy)\,dx; \qquad y(1)=y'(1)=0.$$

Indicación. Puede buscarse la solución en la forma

$$y_n(x)=(x-1)^2(\alpha_0+\alpha_1x+\cdots+\alpha_nx^n);$$

efectuar los cálculos para $n=1$

3. Hallar la solución aproximada del problema sobre el mínimo de la funcional

$$v[y(x)]=\int_0^1 (y'^2-y^2-2xy)\,dx; \qquad y(0)=y(1)=0$$

y comparar con la solución exacta.

Indicación La solución aproximada puede buscarse en la forma

$$y_n=x(1-x)(\alpha_0+\alpha_1x+\cdots+\alpha_nx^n),$$

efectuar los cálculos para $n=0$ y para $n=1$.

4. Hallar la solución aproximada del problema sobre el extremo de la funcional

$$v[y(x)]=\int_1^2 \left(xy'^2-\frac{x^2-1}{x}y^2-2x^2y\right)dx, \quad y(1)=y(2)=0$$

y comparar con la solución exacta.

Indicación. Puede buscarse la solución en la forma

$$y=\alpha(x-1)(x-2).$$

5. Hallar por el metodo de Ritz la solución aproximada del problema sobre el mínimo de la funcional

$$v[y(x)]=\int_0^2 (y'^2+y^2+2xy)\,dx; \quad y(0)=y(2)=0$$

y comparar con la solución exacta.

Indicación. Véase el ejercicio 3.

6. Hallar por el método de Ritz la solución aproximada de la ecuación diferencial $y''+x^2y=x$, $y(0)=y(1)=0$. Determinar $y_2(x)$ e $y_3(x)$ y comparar sus valores en los puntos $x=0{,}25$, $x=0{,}5$ y $x=0{,}75$.

Respuestas e indicaciones a los ejercicios

DEL CAPITULO 1

1. $\operatorname{sen} y \cos x = c$. **2.** $6x^2 + 5xy + y^2 - 9x - 3y = c$. **3.** $x^2 - 2cy = c^2$. **4.** $y = \frac{c}{x} + \frac{x^3}{4}$. **5.** $\frac{y^2}{2} + \frac{y}{x} = c$. **6.** $x = ce^{-3t} + \frac{1}{5}e^{2t}$. **7.** $y = c\cos x + \operatorname{sen} x$. **8.** $e^x - e^y = c$. **9.** $x = ce^t - \frac{1}{2}(\cos t + \operatorname{sen} t)$. **10.** Ecuación homogénea. $x = ye^{cy+1}$. **11.** $y = cx$ e $y^2 - x^2 = c$. **12.** $y^2 = \frac{1}{(3x+c)^2}$. **13.** $\ln|t| = c - e^{-\frac{x}{t}}$. **14.** Se puede introducir un parámetro, haciendo $y' = \cos t$ $\begin{cases} x = \operatorname{sen} t, \\ y = \frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} + c. \end{cases}$ **15.** $y = cx + \frac{1}{c}$, solución singular $y^2 = 4x$. **16.** $\begin{cases} x = p^3 - p + 2, \\ y = \frac{3}{4}p^4 - \frac{p^2}{2} + c. \end{cases}$ **17.** La ecuación es lineal con respecto a x y a $\frac{dx}{dy}$, $x = cy \pm \frac{y^3}{2}$. **18.** $\begin{cases} x = \frac{4}{3}p^3 - \frac{3}{2}p^2 + c, \\ y = p^4 - p^3 - 2 \end{cases}$ **19.** Las hipérbolas $x^2 - y^2 = c$. **20.** La ecuación diferencial de las curvas buscadas es $\frac{y}{2x} = y'$. *Respuesta*: $y^2 = 2cx$. **21.** La ecuación diferencial de las curvas buscadas es $y - xy' = x$. *Respuesta*: $y = cx - x\ln|x|$. **22.** $x^2 + y^2 - 2cy = 0$. El problema se resuelve en forma especialmente sencilla en coordenadas polares. **23.** La ecuación diferencial del problema es $\frac{dT}{dt} = k(T - 20)$. *Respuesta*: dentro de 1 hora. **24.** La ecuación diferencial del problema es $\frac{dv}{dt} = kv$, donde v es la velocidad. *Respuesta*: $v \approx 0{,}466$ km/h. **25.** Si se ubica el origen de coordenadas en el punto dado y se dirige el eje de las abscisas en forma paralela a la dirección dada en las condiciones del problema, la ecuación diferencial de las curvas girando las cuales se forma la superficie buscada, tiene la forma $y' = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + y^2}}{y}$ (o bien $dx - d\rho = 0$, donde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$). *Respuesta*: la sección axial de la superficie buscada se determina por la ecuación $y^2 = 2cx - c^2$; la superficie es un paraboloide de revolución. **26.** $y = 2\operatorname{sen}(x - C)$. **27.** La ecuación diferencial de las

curvas buscadas es $y' = -\frac{y}{x}$. *Respuesta:* las hipérbolas $xy = c$. **28.** $(x+y+1)^3 = = c(x-y+3)$. **29.** $y = \frac{2(1+x)}{c+2x+x^2}$. **30.** $y(0,5) \approx 0,13$. **31.** $y(0,6) \approx 0,07$ **32.** $y(0,02) \approx 1,984$; $y(0,04) \approx 1,970$; $y(0,06) \approx 1,955$; $y(0,08) \approx 1,942$; $y(0,10) \approx 1,930$; $y(0,12) \approx 1,917$; $y(0,14) \approx 1,907$; $y(0,16) \approx 1,896$; $y(0,18) \approx \approx 1,886$, $y(0,20) \approx 1,877$, $y(0,22) \approx 1,869$; $y(0,24) \approx 1,861$; $y(0,26) \approx 1,854$, $y(0,28) \approx 1,849$; $y(0,30) \approx 1,841$. **33.** $\begin{cases} x = \frac{c}{p^2} + \frac{2p}{3}, \\ y = 2px - p^2 \end{cases}$ e $y = 0$. **34.** $x + + \operatorname{ctg} \frac{x-y}{2} = c$. **36.** $(x+y+1)^3 = ce^{2x+y}$ **37.** $y = c$, $y = e^x + c$; $y = -e^x + c$. **38** $y^2 = 2cx + c^2$. **39.** No tiene **40.** $y_1 = \frac{x^2-1}{2}$; $y_2 = \frac{x^2-1}{2} + \frac{2}{15} - \frac{1}{4}x + \frac{x^3}{6} - - \frac{x^5}{20}$ **41.** $y = 2x^2 - x$. **42.** No tiene. **43.** $x = ce^{\frac{x}{y}}$ **44.** $x^2 + \frac{3y^2}{2} = c^2$. **45.** $x = 2t$ **46.** $x = t^3$ **47.** $y = -x + 1$ e $y = -\frac{x^2}{4}$. **48.** No existe solución real **49.** $3x - - 4y + 1 = ce^{x-y}$ **50.** $x = (4t + c)\operatorname{sen} t$. **51.** $y = cx + \frac{c^2 - x^2}{2}$ y la solución singular $y = -x^2$. **52.** $y = \frac{7x^3}{x^7 + c}$, $y = 0$. **53.** $x - c = \frac{a}{2}(2t - \operatorname{sen} 2t)$, $y = \frac{a}{2}(1 - \cos 2t)$, que es una familia de cicloides. Solución singular: $y = a$. Indicación: es cómodo introducir un parámetro t, haciendo $y' = \operatorname{ctg} t$. **54.** $3(x^2 + y) + xy^3 = cx$. **55** $u = \frac{c}{(y^3 + x)^3}$ **56.** $x = ce^{\frac{x}{y}}$ **57.** $x^2 + 2xy - y^2 - 6x - 2y = c$. **58.** $y = = \frac{1}{1 + cx + \ln x}$ e $y = 0$. **59** $(x^2 - 1)y - \operatorname{sen} x = c$ **60.** $8y + 4x + 5 = ce^{4x-8y-4}$. **61.** $y^3 + x^3 - 3xy = c$ **62.** $y = c(x^2 + y^2)$. **63.** $y^3 = x + \frac{c}{x}$. **64.** $y = c(x + a) + c^2$ y la solución singular $y = -\frac{(x+a)^2}{4}$ **65.** $x = \frac{2}{3}t + \frac{c}{t^2}$, $y = 2xt - t^2$ e $y = 0$, $y = \frac{3}{4}x^2$. **66** $y = \frac{c}{1 \pm \cos x}$

DEL CAPÍTULO 2

1 $y = 5e^{3x} \operatorname{sen} x + 10$ **2.** $x = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t + \frac{1}{3}\cos 2t - \frac{t\cos t}{2}$ **3.** $(y - c_3)^2 = c_1 x + c_2$. **4.** $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{2\operatorname{sen} x}$ **5.** $y = c_1 x^3 + + c_2 x^2 + \frac{1}{3}$. **6** $y = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x + \frac{1}{2}\operatorname{ch} x$ **7** $y = \frac{1}{c_1 x + c_2} + 1$. **8.** $x = e^{2t} \times \times (c_1 + c_2 t) + \frac{t^2 e^{2t}}{2} + e^t + \frac{1}{4}$. **9.** $y = -\frac{x}{c_1} + \frac{c_1^2 + 1}{c_1^2} \ln|1 + c_1 x| + c_2$. **10.** $c_1 x^2 + + 1 = c_1^2 (t + c_2)^2$. **11** $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 \cos 2x + c_4 \operatorname{sen} 2x - \frac{x^2}{16} + \frac{1}{15} e^x$ **12.** $y = \cos(x - c_1) + c_2 x + c_3$ **13.** $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 x^3 + c_4 x^2 + c_5 x + c_6 - \frac{x^4}{24}$

14. $x=e^{t}(c_1+c_2t)+e^{-t}(c_3+c_4t)+1+t^2$. **15.** $y=c_0\Big(1-\frac{4x^3}{2\cdot 3}+\frac{4^2x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}-\ldots+\frac{(-1)^k4^kx^{3k}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\ldots(3k-1)\,3k}+\ldots\Big)+c_1\Big(x-\frac{4x^4}{3\cdot 4}+\frac{4^2x^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}-\ldots+\frac{(-1)^k4^kx^{3k+1}}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\ldots 3k\,(3k+1)}+\ldots\Big)$. **16.** $y=c_1J_{\frac{1}{5}}(3x)+c_2J_{-\frac{1}{5}}(3x)$. **17.** $y=x$

18. $y=\left(\frac{1}{2}x+1\right)^4$ **19.** $y=c_1\cos x+c_2\,\mathrm{sen}\,x+1+x\cos x-\mathrm{sen}\,x\ln|\mathrm{sen}\,x|$

20. $u=\frac{c_1}{r}+c_2$. **21.** La ecuación diferencial del problema es $\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{k}{r^2}$, o bien $v\frac{dv}{dr}=\frac{k}{r^2}$, donde r es la distancia del centro de la Tierra hasta el cuerpo, v es la velocidad, $k=-6400^2g$ *Respuesta*: $v\approx 11$ km/seg. **22.** La ecuación diferencial de movimiento es $\frac{d^2x}{dt^2}=-g+k\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$. *Respuesta*: $x=\frac{75^2}{g}\ln \mathrm{ch}\,\frac{9}{75}t$. **23.** La ecuación diferencial de movimiento es $\frac{d^2s}{dt^2}=k(s+1)$, o bien $\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{g}{6}(s+1)$ *Respuesta*: $t=\sqrt{\frac{6}{g}}\ln(6+\sqrt{35})$. **24.** $t=\frac{3}{\sqrt{g}}\ln(9+\sqrt{80})$ **25.** $s=\frac{F-a}{b}t-\frac{(F-a)p}{b^2g}\left(1-e^{-\frac{bg}{p}t}\right)$. **26.** $x=A\cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t$. **27.** $x=a\cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t$ **28.** La ecuación diferencial de movimiento es $\ddot{x}+k_1\dot{x}-k_2x=0$, $k_2>0$. *Respuesta*: $x=c_1e^{\left(-\frac{k_1}{2}+\sqrt{\frac{k_1^2}{4}+k_2}\right)t}+c_2e^{\left(-\frac{k_1}{2}-\sqrt{\frac{k_1^2}{4}+k_2}\right)t}$ **29.** $x=12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,\mathrm{sen}\,nt}{(n^2-2)\,n^3}$

30. $y^2=c_1\left(x^2+x\sqrt{1+x^2}+\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|\right)+c_2$ **31.** $y=c_2e^{c_1x}+c_1$, $y=\frac{4}{c-x}$

32. $x=c_1\cos 3t+c_2\,\mathrm{sen}\,3t-\frac{1}{12}t^2\cos 3t+\frac{1}{36}\,\mathrm{sen}\,3t$. **33.** $y=e^{-x}\left(c_1+c_2x-\frac{1}{4}x^2\right)+\frac{1}{8}e^{x}$. **34.** $y=c_1e^{x}+e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_3\,\mathrm{sen}\,\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\frac{1}{3}xe^{x}$

35. $y=e^{x}(c_1\cos x+c_2\,\mathrm{sen}\,x)+\frac{xe^{x}\cos x}{4}+\frac{x^2e^{x}\,\mathrm{sen}\,x}{4}$. **36.** $y=c_1(x-x^3)+c_2\left[4-6x^2+3(x^3-x)\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\right]-\frac{1}{6}$. **37.** $u=c_1\ln(x^2+y^2)+c_2$ **38.** $u=\frac{c_1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+c_2$. **39.** La ecuación diferencial de movimiento es $m\ddot{x}=mg-k\dot{x}$. *Respuesta*: $x=\frac{mg}{k}t-\frac{m^2g}{k^2}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)$. **40.** a) $t-t_0=\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{t_0^2+\frac{2}{m}\int_{x_0}^{x}f(x)\,dx}}$.

b) $x-x_0=m\int_{v_0}^{v}\frac{v\,dv}{f(v)}$; $t-t_0=m\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{f(v)}$, donde $v=\dot{x}$ **41.** $y=c_1+c_2x+c_3x^2+$

$+e^x(c_4+c_5x+c_6x^2)-\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{24}$. **42.** $x=(c_1+c_2t)\cos t+(c_3+c_4t)\operatorname{sen} t-\frac{1}{8}t^2\cos t$. **43.** $y=c_1\cos\ln(1+x)+c_2\operatorname{sen}\ln(1+x)+\ln(1+x)\operatorname{sen}\ln(1+x)$ **44.** $x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2-n^2)\operatorname{sen} nt-2n\cos nt}{[(2-n^2)^2+4n^2]n^4}$. **45.** $x=\frac{\alpha_0}{2a_2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{-(n^2-a_2)\alpha_n-a_1n\beta_n}{(n^2-a_2)^2+a_1^2n^2}\cos nt+\frac{a_1n\alpha_n-(n^2-a_2)\beta_n}{(n^2-a_2)^2+a_1^2n^2}\operatorname{sen} nt\right]$, donde α_0, α_n y β_n son los coeficientes de Fourier de la función $f(t)$. **46.** $x=\frac{\cos t}{2}+\frac{\mu}{24}(1+3\cos 2t)$. **47.** $y=c_1x+c_2xe^{-\frac{1}{x}}$. **48.** $x^2y''+xy'-y=0$. **49.** $x=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t+c_2\operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)+e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t}\left(c_3\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t+c_4\operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)+t^3$ **50.** $x=t^3+t+1$, $y=\frac{3}{8}t^6+\frac{3}{10}t^5+\frac{3}{16}t^4+\left(c_1+\frac{1}{6}\right)t^3+c_1t+c_2$. **51.** $x=(c_1+c_2t)e^{-5t}+\frac{2^t}{(5+\ln 2)^2}+\frac{t^3e^{-5t}}{6}$. **52.** $y=c_2e^{c_1x^2}$. **53.** $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+e^{\frac{x}{2}}\left(c_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_4\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+e^{-\frac{x}{2}}\left(c_5\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_6\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\frac{e^{2x}}{63}$ **54.** $y=(c_1x+c_2)\cos x+(c_3x+c_4)\operatorname{sen} x+c_5+c_6x+\frac{x^3}{6}+\frac{1}{4}e^x$. **55.** $y=(c_1x+x_2)^3+c_3x+c_4$. **56.** $y=e^{1+c_1x}\left(\frac{x}{c_1}-\frac{1}{c_1^2}\right)+c_2$. **57.** $y=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen} x-\frac{\operatorname{sen}2x}{6}-\frac{\operatorname{sen}4x}{30}$ **58** $y=-\frac{1}{x-2}$. **59.** $y=c_2e^{c_1x}+\frac{1}{c_1}$.

DEL CAPITULO 3

1. $x=\operatorname{sen} t$, $y=\cos t$. **2.** $x_1=2e^t$, $x_2=2e^t$. **3.** $x=c_1e^{(-1+\sqrt{15})t}+c_2e^{(-1-\sqrt{15})t}+\frac{2}{11}e^t+\frac{1}{6}e^{2t}$; se halla y a partir de la primera ecuación: $y=e^t-\frac{dx}{dt}-5x$. **4.** $x=c_1e^t+e^{-\frac{1}{2}t}\left(c_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_3\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$; y y z se determinan de las ecuaciones: $y=\frac{dx}{dt}$, $z=\frac{d^2x}{dt^2}$. **5.** $x=c_1e^{c_2t}$; $y=c_1c_2e^{c_2t}$. **6.** $x=c_1\cos t+c_2\operatorname{sen} t+3$; $y=-c_1\operatorname{sen} t+c_2\cos t$ **7.** $y=c_1J_0(x)+c_2Y_0(x)$; $z=x\left[c_1J_0'(x)+c_2Y_0'(x)\right]$. **8.** $x+y+z=c_1$, $x^2+y^2+z^2=c_2^2$. **9.** $x=c_1e^t+c_2e^{-2t}$; $y=c_1e^t+c_3e^{-2t}$; $z=c_1e^t-(c_2+c_3)e^{-2t}$. **10.** $x=c_1t+\frac{c_2}{t}$, $y=-c_1t+\frac{c_2}{t}$. **11.** $x=c_1\cos t+c_2\operatorname{sen} t-t\cos t+\operatorname{sen} t\ln|\operatorname{sen} t|$. y se determina de la ecuación $y=\frac{dx}{dt}-1$. **12** $x^2-y^2=c_1$, $y-x-t=c_2$. **13.** $x=c_1e^t+c_2e^{-t}+\operatorname{sen} t$; $y=-c_1e^t+c_2e^{-t}$ **14.** $x=e^t$, $y=4e^t$. **15.** $0(1)\approx 0{,}047$ **16.** $x=e^{at}(c_1\cos t+c_2\operatorname{sen} t)$, $y=e^{at}(c_1\operatorname{sen} t-c_2\cos t)$. **17** $x=2c_1e^{-t}+c_2e^{-7t}$, $y=-c_1e^{-t}+c_2e^{-7t}$. **18.** $x=e^{-3t}(2c_1\cos t+2c_2\operatorname{sen} t)$,

$y=e^{-6t}[(c_1-c_2)\cos t+(c_1+c_2)\operatorname{sen} t]$. **19.** $x=c_1e^t+c_2$, $y=(c_1t+c_3)e^t-t-1-c_2$, $z=y-c_1e^t$. **20.** $x+y+z=c_1$, $xyz=c_2$. **21.** $x^2+y^2+z^2=c_1^2$, $xyz=c_2$. **22.** $X=\begin{Vmatrix} c_1e^t+c_2e^{-t} \\ c_1e^t+3c_2e^{-t} \end{Vmatrix}$.

DEL CAPITULO 4

1. El punto de reposo es asintóticamente estable. **2.** El punto de reposo es inestable. **3.** Para $\alpha<-\frac{1}{2}$ el punto de reposo es asintóticamente estable; para $\alpha=-\frac{1}{2}$, estable; para $\alpha>-\frac{1}{2}$, inestable. **4.** Para $\alpha\leqslant 0$ el punto de reposo es asintóticamente estable; para $\alpha>0$, inestable. **5.** Para $1<t<2$, $x(t,\mu)\longrightarrow\sqrt{4-t^2}$; para $2<t<3$, $x(t,\mu)\longrightarrow-\sqrt{9-t^2}$, para $t>3$, $x(t,\mu)\longrightarrow\infty$. **6.** $x(t,\mu)\longrightarrow\infty$. **7.** El punto de reposo es inestable. **8.** El punto de reposo es estable. **9.** El punto de reposo es inestable. **10.** El punto de reposo es estable. **11.** Montura. **12.** La solucion periódica $x=\frac{1}{5}\operatorname{sen} t-\frac{2}{5}\cos t$ es asintóticamente estable. **13.** Todas las soluciones, entre ellas las periódicas, son asintóticamente estables. **14.** El punto de reposo es inestable. La función $v=x^4-y^4$ satisface las condiciones del teorema de Chetaev. **15.** Todas las soluciones son inestables. **16.** La solución $x=0$ es inestable. **17.** Para $1<\alpha<2$, la solución $x=0$ es asintóticamente estable. Para $\alpha=1$ y para $\alpha=2$, la solución $x=0$ es estable. Para $\alpha>2$ y para $\alpha<1$, la solución $x=0$ es inestable. **18.** La solución $x=0$, $y=0$ es estable bajo perturbaciones de acción constante. La función $v=4x^2+3y^2$ satisface las condiciones del teorema de Malkin. **19.** La solución $X(t)=0$ es inestable. **20.** Todas las soluciones son estables, pero no hay estabilidad asintótica. **21.** Todas las soluciones son estables, pero no hay estabilidad asintótica. **22.** La solución periódica $x=\frac{\cos t-\operatorname{sen} t}{2}$ es inestable. **23.** La región de estabilidad es $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, la de estabilidad asintótica, $0<\alpha<1$. **24.** La región de estabilidad es $\alpha\geqslant 5$, la de estabilidad asintótica, $\alpha>5$.

DEL CAPITULO 5

1. $z=\Phi(x+y)$. **2.** $z=e^{2x}\Phi(x-y)$. **3.** $z=e^{\frac{y}{x}}\Phi(x)$. **4.** $\Phi\left(z,\ ye^{\frac{x}{z}}\right)=0$. **5.** $z=5+\frac{\Phi(x^3y^5)}{y^3}$. **6.** $u=\Phi(x-y,\ y-z)$. **7.** $u=x^4\Phi\left(\frac{y}{x^2},\ \frac{z}{x^3}\right)$. **8.** $z=x\Phi_1(y)+\Phi_2(y)$. **9.** $z=(x^2+y-1)^2$. **10.** $z=ye^{\frac{x-1}{y}}$. **11.** $z=3x$. **12.** $z=\left(y^2-\frac{2x}{z}\right)^{3/2}$. **13.** $\Phi(z^2+x^2,\ x^2-y^2)=0$. **14.** $\Phi(z^2-x^2,\ x^2-y^2)=0$. **15.** No se integra. **16.** $2xy+y^2+6xz^3=c$. **17.** $z=ax^3+\frac{y^3}{9a}+b$ (son posibles también otras respuestas). **18.** $z=ax+by+a^3b^3$ (también son posibles otras respuestas). **19.** $z=be^{\frac{3}{a}(a^2x+y)}$ (son posibles también otras respuestas). **20.** $z=x\operatorname{sen} a+ay+b$ (también son posibles otras respuestas). **21.** $x^2y-3xyz=c$. **22.** No existe tal familia de superficies, puesto que la condicion $(\boldsymbol{F}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{F})=0$ no se cumple. **23.** La ecuación de las líneas vectoriales es $\frac{y}{x}=c_1$, $xz=c_2$. La ecuación

de las superficies vectoriales es $z=\frac{1}{x}\Phi\left(\frac{y}{x}\right)$. La ecuación de las superficies ortogonales a las líneas vectoriales es $x^2+y^2-z^2=c$. **24.** $z=xy+1$. **25.** $z=3xy$ **26.** $z=x^2+y^2$.

DEL CAPITULO 6

1. Las extremales son las circunferencias $(x-C_1)^2+y^2=C_2^2$. **2.** La integral no depende del camino de integración. El problema variacional no tiene sentido. **3.** No hay extremo en la clase de funciones continuas. **4.** Las extremales son las hipérbolas $y=\frac{C_1}{x}+C_2$. **5.** $y=C_1\operatorname{sen}(4x-C_2)$. **6.** $y=-\frac{x^3}{4}+C_1x+C_2$. **7.** $y=\operatorname{sh}(C_1x+C_2)$. **8.** $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+\frac{1}{2}\operatorname{sen}x$ **9.** $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+C_3\cos 2x+C_4\operatorname{sen}2x$. **10.** $y=\frac{x^7}{7!}+C_1x^5+C_2x^4+C_3x^3+C_4x^2+C_5x+C_6$. **11.** $y=(C_1x+C_2)\cos x+(C_3x+C_4)\operatorname{sen}x$, $z=2y+y''$, de donde z se determina fácilmente. **12.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$. **13.** $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f(x,\ y,\ z)$. **14.** $y=C_1x^4+C_2$. **15.** $y=\frac{1}{2}xe^x+C_1e^x-C_2e^{-x}$ **16.** $y=-\frac{x\cos x}{2}+C_1\cos x+C_2\operatorname{sen}x$ **17.** $y=C_1\operatorname{ch}x+C_2\operatorname{sh}x+x\operatorname{sh}x-\operatorname{ch}x\ln\operatorname{ch}x$ **18.** $y=C_1x+\frac{C_2}{x^2}+\frac{1}{3}x\ln|x|$. **19.** $y=(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\operatorname{sen}x-\frac{x^2\operatorname{sen}x}{4}$. **20.** $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+e^{\frac{x}{2}}\left(C_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x-C_4\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+e^{-\frac{x}{2}}\left(C_5\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_6\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+x^3$.

DEL CAPITULO 7

1. $y=-x$ para $0\leqslant x\leqslant 1$; $y=x-2$ para $1<x\leqslant 4$, e $y=x$ para $0\leqslant x\leqslant 3$; $y=-x+6$ para $3<x\leqslant 4$. En ambas quebradas la funcional tiene un mínimo absoluto. **2.** No existe **3.** Las quebradas que pasan por los puntos frontera da los están formadas por segmentos de recta con coeficientes angulares $\sqrt{3}$ y $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ **4** $\frac{\varphi'-y'}{1+y'\varphi'}=1$, es decir, las extremales deben cortar a la curva $y_1=\varphi(x_1)$ por la cual se desliza el punto frontera formando un angulo de $\frac{\pi}{4}$. **5.** $y=\frac{x^5}{120}+\frac{1}{24}(x^2-x^3)$. **6.** $y=\pm\frac{3}{4}x$ para $0\leqslant x\leqslant\frac{16}{5}$; $y=\pm\sqrt{9-(x-5)^2}$ para $\frac{16}{5}<x\leqslant\frac{34}{5}$; $y=\pm\frac{3}{4}(x-10)$ para $\frac{34}{5}<x\leqslant 10$, es decir, la curva está formada por un segmento de recta tangente a la circunferencia, un arco de circunferencia y nuevamente un segmento de tangente a ésta. **7.** $y=0$. **8.** Los arcos de circunferencia $y=\pm\sqrt{8x-x^2}$.

DEL CAPITULO 8

1. Para $y=-\frac{x^3}{4}+1$ se tiene un mínimo fuerte. **2.** Para $y=0$ se tiene un mínimo fuerte si $0<a<\frac{\pi}{4}$, si, en cambio, $a>\frac{\pi}{4}$, no hay mínimo **3.** No

hay extremo en las curvas continuas. **4.** Hay un mínimo fuerte para $y=7-\frac{4}{x}$. **5.** Para $y=1$ hay un mínimo fuerte. **6.** Hay un máximo fuerte para $y=\operatorname{sen}2x-1$. **7.** Para $y=x^3$ hay un mínimo fuerte. **8.** Hay un mínimo fuerte para $y=\frac{1}{3}e^{3x}$. **9.** Para $y=\operatorname{sen}2x$ hay un máximo fuerte. **10.** En la recta $y=\frac{y_1}{x_1}x$ hay un mínimo débil. **11.** En la recta $y=\frac{y_1}{x_1}x$ hay un mínimo débil. **12.** Hay un mínimo débil en $y=x^2$. **13.** Para $y=x^3-1$ hay un máximo fuerte. **14.** Hay un mínimo fuerte para $y=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{sh}2}+x$.

DEL CAPITULO 9

1. $y=\pm 2\operatorname{sen}n\pi x$, donde n es un entero. **2.** $\varphi=C_1+C_2z$; $r=R$. **3.** $y=\lambda x^2+C_1x+C_2$, donde C_1, C_2 y λ se determinan de las condiciones de frontera y de la condición isoperimétrica. **4.** $\frac{d}{dx}(p(x)y')+[\lambda r(x)-q(x)]y=0$; $y(0)=0$; $y(x_1)=0$. La solución trivial $y\equiv 0$ no satisface la condición isoperimétrica, y las soluciones no triviales existen, como es sabido, sólo para ciertos valores de λ, llamados valores propios. En consecuencia, λ debe ser un valor propio. Una constante arbitraria de la solución general de la ecuación de Euler se determina de la condición $y(0)=0$; la otra, de la condición isoperimétrica. **5.** $y=-\frac{5}{2}x^2+\frac{7}{2}x$; $z=x$.

DEL CAPITULO 10

1. $z_1=\frac{5}{16a^2}(x^2-a^2)(y^2-b^2)$. Si es necesaria mayor exactitud, la solución puede buscarse en la forma $z_2=(x^2-a^2)(y^2-b^2)[\alpha_0+\alpha_1\cdot(x^2+y^2)]$. **2.** $y_1=(x-1)^2(0{,}124+0{,}218x)$. **3.** La solución exacta es $y=\frac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}1}-x$. **4.** La solución de la ecuación de Euler es $y=3{,}6072\,J_1(x)+0{,}75195\,Y_1(x)-x$, donde J_1 e Y_1 son las funciones de Bessel. **5.** La solución exacta es $y=\frac{2\operatorname{sh}x}{\operatorname{sh}2}-x$. **6.** Si la solución se busca en la forma $y_2=x(x-1)(\alpha_1+\alpha_2x)$, $y_3=x(x-1)(\alpha_1+\alpha_2x+\alpha_3x^2)$, entonces $y_2=x(x-1)(0{,}1708+0{,}17436x)$, $y_3=x(x-1)(0{,}1705+0{,}1760x-0{,}0018x^2)$. En los puntos dados los valores de y_2 e y_3 coinciden con una exactitud de 0,0001.

Bibliografía recomendada

PARA LA PARTE I

1. I. G. Petrovski, Lecciones sobre la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias, 5ª ed., „Naúka", 1964 (en ruso).
2. I. G. Malkin, Teoría de la estabilidad del movimiento, Gostejizdat, 1952 (para el cap. 4) (en ruso).
3. I. G. Malkin, Ciertos problemas de la teoría de las oscilaciones no lineales, Gostejizdat, 1956 (para el § 8 del cap. 2) (en ruso).
4. A. N. Tijonov, Sobre la dependencia de las soluciones de las ecuaciones diferenciales de un parámetro pequeño. Matematicheski sbornik, tomo 22(64):2(1948) y tomo 31(72):3(1952) (para el § 6 del cap. 4) (en ruso).
5. V. V. Stepánov, Curso de ecuaciones diferenciales, 8ª ed., Fizmatguiz, 1959 (en ruso).
6. A. N. Krylov, Lecciones sobre el cálculo aproximado, 5ª ed., Gostejizdat, 1950 (para el § 7 del cap. 1 y el § 6 del cap. 3) (en ruso).
7. I. S. Berezin y N. P. Zhidkov, Métodos de cálculo, tomo II, Fizmatguiz, 1960 (para el § 7 del cap. 1 y el § 6 del cap. 3) (en ruso).

PARA LA PARTE II

1. I. M. Guelfand y S. V. Fomin, Cálculo variacional, Fizmatguiz, 1961 (en ruso).
2. M. A. Lavrentiev y L. A. Lusternik, Curso de cálculo variacional, 2ª ed., Gostejizdat, 1950 (en ruso).
3. V. I. Smirnov, V. I. Krylov y L. V. Kantorovich, Cálculo variacional, KUBUCh, 1933 (en ruso).
4. V. I. Smirnov, Curso de matemáticas superiores, tomo 4, 4ª ed., Fizmatguiz, 1958 (en ruso).
5. N. M. Günter, Curso de cálculo variacional, Gostejizdat, 1941 (en ruso).
6. N. I. Ajiezer, Lecciones del cálculo variacional, Gostejizdat, 1955 (en ruso).
7. M. A. Lavrentiev y L. A. Lusternik, Fundamentos del cálculo variacional, partes 1 y 2, Gostejizdat, 1935 (en ruso).

8. L. S. Pontriaguin, V. G. Boltianski, R. V. Gamkrelidze y E. F. Mishenko, Teoría matemática de los procesos óptimos, Fizmatguiz, 1961 (en ruso).
9. R. Bellman., Dynamic Programming.
10. L. V. Kantorovich y V. I. Krylov, Métodos aproximados del análisis superior, 5ª ed., Fizmatguiz, 1962 (en ruso).
11. S. G. Mijlin, Métodos directos en la física matemática, Gostejizdat, 1950 (en ruso).

INDICE ALFABETICO DE MATERIAS